1. Určete první a druhou derivaci funkce $y = y(x)$ zadané implicitně rovnicí

$$y = x + 2\cos y$$

Řešení:
$$y' = \frac{1}{1 + 2\sin y} \quad \text{a} \quad y'' = \frac{-2\cos y}{(1 + 2\sin y)^3} \quad \text{pro} \quad 1 + 2\sin y \neq 0$$

2. Vyšetřete konvergenci/divergenci integrálu

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+3x)\sqrt{x}}\,dx$$

Řešení: integrál je nevlastní vlivem funkce

$$= \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{1}{(1+3x)\sqrt{x}}\,dx = \lim_{t\to 0^+} \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \sqrt{3x}\right]_t^1 =$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \sqrt{37}\right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

integrál konverguje a je roven $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

3. Vyšetřete absolutní/relativní konvergenci/divergenci číselné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n\,(n+1)!}{n^5}$$

Řešení:
$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ldots = 3 \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^5} = \infty = q > 1$$

řada diverguje

1. Určete první a druhou derivaci funkce $y = y(x)$ zadané implicitně rovnicí

$$x - y = 3 \sin y$$

Řešení:
$$y' = \frac{1}{1 + 3\cos y} \quad \text{a} \quad y'' = \frac{3 \sin y}{(1 + 3\cos y)^3} \quad \text{pro} \quad 1 + 3\cos y \neq 0$$

2. Vyšetřete konvergenci/divergenci integrálu

$$\int_3^\infty \frac{1}{(x-2)(x+3)}\, dx$$

Řešení: integrál je nevlastní vlivem horní meze

$$= \lim_{t\to\infty} \int_3^t \frac{1}{(x-2)(x+3)}\, dx = \lim_{t\to\infty} \left[\frac{1}{5} \ln \left| \frac{x-2}{x+3} \right| \right]_3^t = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{5} \ln \frac{t-2}{t+3} - \frac{1}{5} \ln \frac{1}{6} \right) = -\frac{1}{5} \ln \frac{1}{6}$$

integrál konverguje a je roven $-\frac{1}{5} \ln \frac{1}{6}$

3. Vyšetřete absolutní/relativní konvergenci/divergenci číselné řady

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(n-2)^4}{n!\, 6^n}$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ldots = \frac{1}{6} \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^4}{n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right)^4} = 0 = q < 1$$

řada konverguje absolutně