První opravný zápočet - řešení, 21.5.2008

1. Určete definiční obor funkce f, zapište ho, zakreslete ho a určete jeho vlastnosti:

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2-9}+3}{1-\ln(x-y)}$$

Řešení:

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x^2+y^2 \geq 9, y < x, y \neq x-e\}$$

D_f nemá žádnou z vlastností

2. Vypočítejte parciální derivace prvního řádu funkce f a co nejvíce je zjednodušte:

$$f(x,y) = (\sin(2x))^{\cos y}$$

Řešení:

$$f'_x(x,y) = 2\cos y \cdot \sin(2x) \cdot (\sin(2x))^{\cos y - 1} \qquad f'_y(x,y) = -\sin y \cdot \ln(\sin(2x)) \cdot (\sin(2x))^{\cos y}$$

Vše pro $\sin(2x) > 0$

3. Určete lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^3+y^3-3xy+4$
Řešení: Stacionární body $(0,0)$ a $(1,1)$. V bodě $(0,0)$ není extrém ($D_2 = -9 < 0$);
V bodě $(1,1)$ je ostré lokální minimum ($D_1 = 6 > 0$, $D_2 = 36-9 > 0$).

4. Určete první a druhou derivaci funkce $y = y(x)$ zadané implicitně rovnicí $x = \ln y + y^2$
Řešení:

$$y'(x) = \frac{y}{1+2y^2} \qquad y''(x) = \frac{x(1-2y^2)}{(1+2y^2)^3} \qquad \text{pro } y > 0$$

5. Vyšetřete konvergenci/divergenci integrálu $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}\,dx$

Řešení: Integrál je nevlastní vlivem funkce ($\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$).
Primitivní funkce je $e^{\frac{1}{x}}(1-\frac{1}{x})$ (substituce $z = \frac{1}{x}$ a pak jednou metoda per partes).

$$\int_0^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}\,dx = \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}\,dx = \lim_{t\to 0^+}\left[e^{\frac{1}{x}}(1-\frac{1}{x})\right]_t^1 = \lim_{t\to 0^+}\left(e^{\frac{1}{1}}(1-\frac{1}{1}) - e^{\frac{1}{t}}(1-\frac{1}{t})\right) =$$

$$= e(1-1) - \infty(1-\infty) = 0+\infty = \infty \qquad \Longrightarrow \qquad \text{nevl. integrál diverguje}$$

6. Vyšetřete absolutní/relativní konvergenci/divergenci číselné řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{n}$

Řešení: Absolutní konvergence:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 2\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 2 > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \text{řada nekonverguje absolutně}$$

Relativní konvergence (podle Leibn. kritéria)

$$\text{Protože } \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n} = \left(\lim_{x\to\infty}\frac{2^x}{x} = (l'H)\lim_{x\to\infty}\frac{2^x\ln 2}{1}\right) = \infty$$

$$\left(\text{resp. protože } \lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{2^n}{n} \text{ neexistuje}\right),$$

není splněna nutná podmínka konvergence a daná řada diverguje.