Výroky a množiny

[Řešení jsou v hranatých závorkách.]

1. Negujte výroky:

   a) Daná rovnice má aspoň tři reálné kořeny.

   b) Nejvýše tři žáci získali vyznamenání.

   c) Aspoň jeden žák přišel pozdě.

   d) Každý den je důvod k radosti.

[a) Daná rovnice má nejvýše dva reálné kořeny. b) Aspoň čtyři žáci získali vyznamenání. c) Ani jeden žák nepřišel pozdě. d) Aspoň jeden den není důvod k radosti.]

2. Vyjádřete daný výrok slovně, znegujte ho a i negaci vyjádřete slovně:

   a) $\forall x \in \mathbb{R}\, \exists n \in \mathbb{N} \,:\, n \geq x$ [$\exists x \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N} \,:\, n < x$]

   b) $\exists y \in \mathbb{R}\, \forall x \in \mathbb{R}^+ \,:\, xy = -x$ [$\forall y \in \mathbb{R}\, \exists x \in \mathbb{R}^+ \,:\, xy \neq -x$]

3. Určete množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro něž platí:

   a) $|x-2| \leq \frac{1}{2}$ [$x \in < \frac{3}{2}, \frac{5}{2} >$]

   b) $3x^2 - 10x + 12 > 0$ [$x \in (-\infty, \infty)$]

   c) $x^2 - 6x + 21 < 0$ [$\emptyset$]

   d) $|x| + |x-1| > 2 + x$ [$x \in (-\infty, -\frac{1}{5}) \cup (3, \infty)$]

4. Nechť jsou dány množiny $A = \{1,3,8\}$ a $B = \{1,3,4,6,7\}$. Určete množiny

   a) $A \cup B$ [$\{1,3,4,6,7,8\}$]

   b) $A \cap B$ [$\{1,3\}$]

   c) $A \setminus B$ [$\{8\}$]

   d) $B \setminus A$ [$\{4,6,7\}$]

5. Dokažte matematickou indukcí:

   a) $1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$

   b) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$

6. Dokažte (pomocí definic množinových operací), že platí:

   a) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$

   b) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

7. Znázorněte graficky kartézský součin $A \times B$, kde $A = \{x \in \mathbb{R}; -1,5 \leq x \leq 1,5\}$ a $B = \{y \in \mathbb{R}; -2 < y < 2\}$, a binární relace:

   - $R_1 = \{(x,y) \in A \times B; x^2 + y^2 \leq 1\}$
   - $R_2 = \{(x,y) \in A \times B; x^2 + y^2 = 1\}$
   - $R_3 = \{(x,y) \in A \times B; x + y = 1\}$
   - $R_4 = \{(x,y) \in A \times B; x \in < -1, 1 >, y = 1 - x^2\}$
   - $R_5 = \{(x,y) \in A \times B; x \in (-1,1), y = -\sqrt{1-x^2}\}$