I. Úvodní pojmy

Obsah

1 Matematická logika

Vyjadřovacími prostředky matematiky, s nimiž se setkáváme v učebnicích i v dalších matematických textech, jsou především běžný spisovný jazyk, speciální jazyk (terminologie a symbolika) logiky a matematiky, grafy, diagramy, schémata a tabulky.

Významné pro matematiku je používání *symbolů (znaků)*. Uvažovaným objektům se přiřazuje kromě názvu objektu také symbol objektu, který ho zastupuje v symbolických zápisech. Symbolem objektu může být buď

a) *konstanta*, což je symbol označující určitý (jediný) objekt z dané množiny objektů, nebo

b) *proměnná*, což je symbol, který označuje kterýkoli objekt z dané množiny objektů.

Množina konstant, které jsou zastupovány proměnnou, se nazývá *obor proměnné*. Prvky oboru proměnné se nazývají *hodnoty proměnné*.

1.1 Výrok, logické operátory, výrokové formule a formy

Výrokem rozumíme každé vyjádření, o kterém má smysl tvrdit, že je pravdivé nebo nepravdivé. Pravdivému výroku přiřadíme pravdivostní hodnotu 1, nepravdivému výroku přiřadíme pravdivostní hodnotu 0. Výroky označujeme zpravidla malými písmeny.

- *Negace výroku* p je výrok p' (také $non\,p$, $\neg p$), čteme *neplatí* p nebo *není pravda, že platí* p.

Nejdůležitější složené výroky vzniklé spojením výroků p a q jsou:

- *Disjunkce výroků* p *a* q : píšeme $p \vee q$ a čteme p *nebo* q. Disjunkce je pravdivá, je-li alespoň jeden z výroků pravdivý a je nepravdivá, když oba výroky jsou nepravdivé. Disjunkce tedy nemá vylučovací smysl.
- *Konjunkce výroků* p *a* q : píšeme $p \wedge q$ a čteme p *i* q nebo p *a* q. Konjunkce je pravdivá právě tehdy, jsou-li oba výroky pravdivé.
- *Implikace výroků* p *a* q : píšeme $p \Rightarrow q$ a čteme *jestliže* p*, pak* q nebo *z* p *plyne* q nebo *když* p*, pak* q nebo p *je postačující podmínka pro* q nebo q *je nutná podmínka pro* p. Implikace je nepravdivá právě v případě, že p je pravdivý výrok a q je nepravdivý výrok. Ve všech jiných případech pravdivostních hodnot výroků p a q je implikace pravdivá.
- *Ekvivalence výroků* p *a* q : píšeme $p \Leftrightarrow q$ a čteme p *právě tehdy, když* q nebo p *právě když* q nebo p *je ekvivalentní s* q nebo p *a* q *jsou ekvivalentní* nebo p *je nutná podmínka a postačující podmínka pro* q a naopak. Ekvivalence je pravdivá právě v případech kdy buď oba výroky p a q jsou pravdivé nebo oba výroky p a q jsou nepravdivé. Ve zbylých případech pravdivostních hodnot výroků p a q je ekvivalence nepravdivá.

Uvedené složené výroky a negaci výroku možno definovat tabulkou pravdivostních hodnot:

p	q	p'	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Symboly $\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ nazýváme *logickými operátory*. Výraz sestavený z výrokových proměnných, závorek a logických operátorů se nazývá *výroková formule*. Dosazením výroků za výrokové proměnné dostaneme složený výrok s pravdivostní hodnotou 0 nebo 1.

Rovnice nebo nerovnice obsahují proměnné, takže už to nejsou výroky, ale tzv. *výrokové formy* - značíme např. $p(x)$. Dosazením prvků jisté množiny do výrokové formy pak opět získáme výroky.

Množina D všech prvků x, pro která má výroková forma $p(x)$ smysl (tj. je výrokem), se nazývá *definičním oborem výrokové formy p(x).* Množina P všech prvků x z D, pro něž je výroková forma $p(x)$ pravdivý výrok, se nazývá *obor pravdivosti výrokové formy p(x).* Vyjmenováním (kvantifikací) těch x, pro které je výroková forma $p(x)$ pravdivý výrok, získáváme tzv. *kvantifikované výroky.*

Pro formulace a zápisy matematických vět jsou nejdůležitějšími kvantifikátory *obecný kvantifikátor* a *existenční kvantifikátor*:

Název kvantifikátoru	Označení	Jazykový význam
obecný kvantifikátor	$\forall$	pro každé; pro všechna
existenční kvantifikátor	$\exists$	existuje (aspoň jedno); pro aspoň jedno
kvantifikátor jednoznačné existence	$\exists!$	existuje právě jedno; pro právě jedno

1.2 Logická výstavba matematiky

V současnosti jsou všechny matematické disciplíny založeny na tzv. *axiomech* (základních větách), což jsou tvrzení, která se bez důkazu prohlásí za pravdivá. Ostatní tvrzení se pak odvozují z těchto axiomů. Každá soustava axiomů musí být *bezesporná* (tj. nesmí se stát, že by z axiomů plynula jak věta V, tak i její negace V'), *úplná* (tj. aby bylo v rámci dané teorie vždy možno rozhodnout, zda nějaké tvrzení platí nebo neplatí) a *nezávislá* (tj. aby žádný z axiomů nebylo možno odvodit z ostatních axiomů).

Další matematické pojmy se zavádějí pomocí *definic.* Definice stanoví název zaváděného pojmu a vymezí podstatné vlastnosti pojmu pomocí dříve definovaných nebo primitivních pojmů.

Výsledky formuluje matematická teorie ve větách. *Matematická věta* (poučka, teorém) je pravdivý matematický výrok, který se dá odvodit pomocí logiky na základě axiomů, definic a dříve dokázaných vět. Věty, které obsahují návod k provedení výpočtu nebo konstrukce, se často nazývají *pravidla.* Pro pomocné věty se v matematické literatuře používá název *lemma.*

Většina matematických vět má tvar

- obecného výroku $\forall x \in D : V(x)$, tzv. *obecné věty*
- existenčního výroku $\exists x \in D : V(x)$, tzv. *existenční věty*

kde $V(x)$ je výroková forma.

Obecná věta ve tvaru implikace:

$$\forall x \in D : A(x) \Rightarrow B(x)$$

Výroková forma $A(x)$ se nazývá *předpoklad* věty, výroková forma $B(x)$ se nazývá *závěr* nebo *tvrzení* věty. Platnost předpokladu $A(x)$ je tzv. *postačující podmínka* pro platnost tvrzení $B(x)$; platnost závěru $B(x)$ se nazývá *nutnou podmínkou* pro platnost předpokladu $A(x)$.

Obecná věta ve tvaru ekvivalence:

$$\forall x \in D : A(x) \Leftrightarrow B(x)$$

Výrokové formy $A(x)$ a $B(x)$ se nazývají *navzájem ekvivalentní.* Platnost $A(x)$ je zároveň nutnou i postačující podmínkou pro platnost $B(x)$ a naopak.

Matematické věty se musí dokázovat, tj. ověřuje se, že dané výroky neboli matematické věty platí!!

1.2.1 Základní metody důkazů matematických vět

- *Přímé důkazy*
  Přímý důkaz matematického výroku (tj. věty, tvrzení) spočívá v tom, že z axiomů a již dříve dokázaných vět získáme tvrzení po konečném počtu korektních úsudků. Přímé důkazy se v některých speciálních případech nazývají konstrukce (konstruktivní důkazy).

- *Nepřímé důkazy implikací $A \Rightarrow B$*
  Nepřímý důkaz vychází z předpokladu, že tvrzení B je nepravdivé, a odvodí odtud, že je nesprávný i předpoklad A, o nemž ale víme, že je pravdivý. Je tedy proveden přímý důkaz implikace $\neg B \Rightarrow \neg A$ (přesněji $\neg B \Rightarrow (\neg A \wedge A)$). Nepřímý důkaz končí prakticky odkazem na *spor*, když z popřeného tvrzení získáme evidentně nepravdivý výrok. Důkazy, které vedou ke sporu, se často nazývají *důkazy sporem.*

- *Protipříklady*
  Obecný i existenční výroky lze vyvrátit nebo potvdit (podle typu tvrzení) již jedním jediným konkrétním příkladem, tzv. *protipříkladem.*

- *Matematická (úplná) indukce*
  Užívá se k dokazování výroků obsahujících spojení *pro všechna přirozená čísla.* Tyto výroky je potřebné ověřit krok za krokem, od jednoho přirozeného čísla k následujícímu. Pravdivost výroku se dědí od čísla k číslu a z dílčí pokračovatelnosti lze usoudit, že výrok je platný v celku.

  Věta 1 (Oprávnění matematické indukce) *Nechť výroková funkce $A(n)$ je definována pro všechna přirozená čísla n a nechť*

  a) $A(1)$ je pravdivý výrok a

  b) pro každé $n \in \mathbb{N}$ z platnosti výroku $A(n)$ plyne také platnost výroku $A(n+1)$.

  Potom platí výrok $A(n)$ pro všechna přirozená čísla.

  Praktický postup: dokážeme výrok $A(1)$, předpokládáme, že platí výrok $A(n)$ a dokážeme (za využití platnosti $A(1)$ a $A(n)$), že platí i výrok $A(n+1)$.

1.2.2 Negace výroků

Při negování výrokových forem se mění kvantifikátory z existenčního na obecný a z obecného na existenční a všechny obsažené výroky se nahradí svými negacemi.
Příklad: Zapište negace následujících výroků a rozhodněte, který z nich je pravdivý a který nepravdivý.
a) $\forall a, b \in \mathbb{R} : a^2 + b^2 > 0$ je nepravdivý a jeho negace je $\exists a, b \in \mathbb{R} : a^2 + b^2 \leq 0$ a je pravdivá
b) $\exists x \in \mathbb{R} : \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ je pravdivý a jeho negace je $\forall x \in \mathbb{R} : \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ a je nepravdivá
Příklad: Zapište negaci výroku $\forall x \in \mathbb{R}\, \exists n \in \mathbb{N} : (n \leq x \wedge n + 1 > x)$
Negace je $\exists x \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : (n > x \vee n + 1 \leq x)$

2 Množiny

Množinou rozumíme soubor (souhrn, skupinu) jakýchkoli objektů, jenž je chápán jako jeden celek. Množina je určená, jestliže o libovolném objektu můžeme rozhodnout, zda do této množiny patří nebo nepatří. Každý z objektů, který patří do množiny, se nazývá *prvek množiny.*

K označování množin používáme zpravidla velká písmena latinské abecedy A, B, M apod. a k označování jejich prvků malá písmena a, b, x apod. Jestliže *prvek a patří do množiny (je prvkem množiny)* M, píšeme $a \in M$. *Nepatří-li prvek b do množiny* (neboli *není prvkem množiny*) M, píšeme $b \notin M$.

Jestliže množina obsahuje alespoň jeden prvek nazývá se *neprázdná množina. Prázdnou množinou* rozumíme množinu, která neobsahuje žádný prvek a značíme ji $\emptyset$.

Množinu nejčastěji zadáváme dvěma způsoby:

- výčtem prvků, tj. vyjmenováním všech prvků (lze jen u konečných množin). Zápis vypadá např. takto: $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, kde n je konečné číslo.

- charakteristickou vlastností, tj. takovou vlastností, kterou mají právě jen prvky zadávané množiny. Zapisujeme $B = \{x; V(x)\}$ a čteme B *je množina všech prvků* x*, pro která platí* $V(x)$.

2.1 Vztahy mezi množinami

Definice 2.1 (Inkluze množin A a B) Říkáme, že A *je podmnožinou* B, jestliže každý prvek množiny A je zároveň prvkem množiny B. Symbolický zapisujeme $A \subset B$ a čteme A *je podmnožinou množiny* B.

Definice 2.2 (Rovnost množin A a B) Říkáme, že množiny A a B *jsou si rovny*, jestliže $A \subset B$ a $B \subset A$, tj. každý prvek jedné množiny je zároveň prvkem druhé množiny. Symbolicky zápisujeme $A = B$ a čteme *množiny* A *a* B *jsou si rovny.*

2.2 Základní operace s množinami

Definice 2.3 (Sjednocení množin A a B) *Sjednocením množin* A *a* B nazveme množinu všech prvků, které patří aspoň do jedné z množin A a B. Symbolicky píšeme $A \cup B$.

Definice 2.4 (Průnik množin A a B) *Průnikem množin* A *a* B nazveme množinu všech prvků, které patří do množiny A a zároveň i do množiny B. Symbolicky píšeme $A \cap B$.

Definice 2.5 (Rozdíl množin A a B) *Rozdílem množin* A *a* B (v tomto pořadí) nazveme množinu všech prvků, které patří do množiny A a zároveň nepatří do množiny B. Symbolicky píšeme $A \setminus B$ nebo $A - B$.

2.3 Kartézský součin množin, zobrazení

Nechť A a B jsou neprázdné množiny.

Definice 2.6 *Kartézským součinem množin* A *a* B nazveme množinu všech uspořádaných dvojic (a, b), kde $a \in A$ a $b \in B$. Kartézský součin značíme $A \times B$ a symbolicky píšeme

$$A \times B = \{(a, b); a \in A \wedge b \in B\}.$$

Pokud $A = B$, pak kartézský součin $A \times A$ značíme jako A^2 a nazýváme ho *druhou kartézskou mocninou* množiny A.

Jestliže vybereme z kartézského součinu jen některé dvojice (a, b), jejichž složky jsou vázány nějakým vztahem (např. $a \geq b$, a je násobkem b), dostaneme tzv. binární relaci.

Definice 2.7 *Binární relací* R *mezi množinami* A *a* B nazveme neprázdnou podmnožinu R kartézského součinu $A \times B$. Zapisujeme $(a, b) \in R$ nebo aRb.

Příklad : Uvažujme množiny $A = \{1, 3\}$ a $B = \{2, 3, 4\}$.
Potom $A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$ a $R = \{(a, b) \in A \times B; a \geq b\} = \{(3, 2), (3, 3)\}$.

Definice 2.8 Binární relaci R mezi množinami A a B nazveme *zobrazením množiny* A *do množiny* B, jestliže ke každému prvku $a \in A$ existuje právě jeden prvek $b \in B$ takový, že $(a, b) \in R$.
Binární relací R mezi množinami A a B nazveme *zobrazením z množiny* A *do množiny* B, jestliže ke každému prvku $a \in A$ existuje aspoň jeden prvek $b \in B$ takový, že $(a, b) \in R$.

2.4 Číselné množiny

Nejčastěji se budeme setkávat s množinami, jejichž prvky jsou právě čísla. Mezi nejdůležitější číselné množiny patří:

- $\mathbb{N}$ ... množina všech přirozených čísel (tj. kladných celých čísel)
- $\mathbb{Z}$ ... množina všech celých čísel
- $\mathbb{Q}$ ... množina všech racionálních čísel
- $\mathbb{R}$ ... množina všech reálných čísel
- $\mathbb{C}$ ... množina všech komplexních čísel

Je zřejmé, že platí množinová inkluze $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Jestliže k označení množiny připojíme horní index + (např. $\mathbb{Z}^+$), znamená to, že z dané množiny uvažujeme pouze kladná čísla; připojíme-li horní index – (např. $\mathbb{Q}^-$), uvažujeme z dané množiny pouze čísla záporná. Dolní index 0 (např. $\mathbb{R}_0^+$) znamená, že do dané množiny zahrnujeme navíc i číslo 0.

2.4.1 Množina $\mathbb{R}$

Na množině všech reálných čísel jsou definovány operace sčítání, odčítání, násobení, dělení (ne nulou!), přičemž tyto operace mají známé vlastnosti (např. komutativní nebo asociativní zákon pro sčítání a násobení atd.)

Množina $\mathbb{R}$ je také lineárně uspořádána pomocí binární relace $<$.

Geometricky lze $\mathbb{R}$ znázornit jako přímku. Každé reálné číslo odpovídá právě jednomu bodu na reálné přímce $\mathbb{R}^1$, kterou také nazýváme *reálnou osou* nebo *jednorozměrným reálným prostorem*, a naopak každému bodu reálné přímky odpovídá právě jedno reálné číslo. Toto vzájemně jednoznačné přiřazení se obvykle realizuje zavedením tzv. *kartézské soustavy souřadnic na přímce*. Kartézská soustava souřadnic je na přímce určena bodem $\mathcal{O}$ (počátek souřadnic), její orientací (tj. určením kladné a záporné poloosy souřadnic) a jednotkou délky.

Vzdálenost (*Eukleidovská vzdálenost*) $d(A, B)$ dvou bodů $A = (a)$ a $B = (b)$ na reálné přímce je dána vztahem $d(A, B) = \sqrt{(b-a)^2} = |b - a|$.

2.4.2 Absolutní hodnota reálného čísla

Důležitým pojmem je *absolutní hodnota* reálného čísla a; značí se $|a|$ a je definována takto:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{je-li } a \geq 0, \\ -a & \text{je-li } a < 0, \end{cases}$$

tj. absolutní hodnota nezáporného čísla je číslo samo, absolutní hodnota záporného čísla je číslo k němu opačné.

Na základě této definice lze odvodit věty vyjadřující významné vlastnosti absolutních hodnot reálných čísel:

pro každé číslo $a \in \mathbb{R}$ platí:

- $|a| \geq 0$; přitom $|a| = 0$ právě tehdy, když $a = 0$
- $|-a| = |a|$
- $|a| = r > 0$ právě tehdy, když $a = r$ nebo $a = -r$ (stručně píšeme $a = \pm r$)

  $|a| < r$, kde $r > 0$, právě tehdy, když $-r < a < r$

  $|a| > r > 0$ právě když $a < -r$ nebo $a > r$

pro každá dvě reálná čísla a, b platí:

- $|a \pm b| \leq |a| + |b|$ (trojúhelníková nerovnost)
- $|a - b| = |b - a|$, $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ a pro $b \neq 0$ $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

Na číselné ose představuje absolutní hodnota $|a|$ reálného čísla a vzdálenost obrazu tohoto čísla a od počátku $\mathcal{O}$.

2.4.3 Množina $\mathbb{R}^*$

Protože množina $\mathbb{R}$ nemá nejmenší ani největší prvek, je vhodné ji někdy doplnit dvěma novými prvky, které se nazývají *nevlastní čísla* nebo *nevlastní body*. Jsou to čísla *plus nekonečno* $+\infty$ (nebo jen ∞) a *minus nekonečno* $-\infty$.

Definice 2.9 Množina $\mathbb{R}$ doplněná o dva nevlastní body $-\infty$ a $+\infty$ se nazývá *rozšířená množina reálných čísel* a značí se $\mathbb{R}^*$, tj. $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Je zřejmé, že platí $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^*$. Čísla z množiny $\mathbb{R}^*$, která nejsou nevlastní (tj.. všecna čísla kromě ∞ a $-\infty$), se někdy nazývají *vlastní čísla*.

Abychom mohli počítat i na množině $\mathbb{R}^*$, musíme na tutu množinu rozšířit výše uvedené operace a uspořádání definované na množině $\mathbb{R}$:

- Uspořádání
  $-\infty < +\infty$
  $-\infty < c < +\infty$ pro každé $c \in \mathbb{R}$

- Absolutní hodnota
  $|+\infty| = |-\infty| = +\infty$

- Sčítání a odčítání
  $+\infty + (+\infty) = +\infty - (-\infty) = +\infty$
  $-\infty + (-\infty) = -\infty - (+\infty) = -\infty$
  pro každé $c \in \mathbb{R}$ platí
  $c + (+\infty) = (+\infty) + c = +\infty$
  $c + (-\infty) = (-\infty) + c = -\infty$
  $c - (+\infty) = -\infty$
  $c - (-\infty) = +\infty$
  není definováno: $\underline{+\infty + (-\infty), +\infty - (+\infty), -\infty + (+\infty), -\infty - (-\infty)}$

- Násobení
  $(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$
  $(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$
  pro každé $c \in \mathbb{R}^+$ platí
  $c \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot c = (+\infty)$
  $c \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot c = (-\infty)$
  pro každé $c \in \mathbb{R}^-$ platí
  $c \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot c = (-\infty)$
  $c \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot c = (+\infty)$
  není definováno: $\underline{0 \cdot (\pm\infty), (\pm\infty) \cdot 0}$

- Dělení
  pro každé $c \in \mathbb{R}$ platí
  $\frac{c}{+\infty} = \frac{c}{-\infty} = 0$
  Pro každé $c \in \mathbb{R}^+$ platí
  $\frac{+\infty}{c} = +\infty$ a $\frac{-\infty}{c} = -\infty$

Pro každé $c \in \mathbb{R}^-$ platí
$\frac{+\infty}{c} = -\infty$ a $\frac{-\infty}{c} = +\infty$
není definováno: $\underline{\frac{\pm\infty}{0}, \frac{+\infty}{\pm\infty}, \frac{-\infty}{\pm\infty}; \frac{0}{0}}$

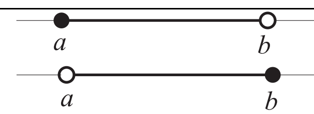
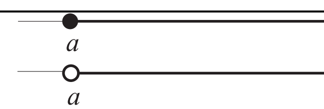
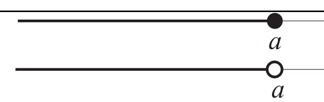
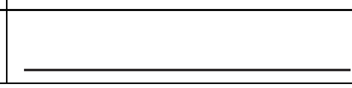
- Umocňování číslem $m \in \mathbb{N}$
  $(+\infty)^m = +\infty$ pro každé $m \in \mathbb{N}$
  $(-\infty)^m = +\infty$ pro každé $m \in \mathbb{N}$ sudé
  $(-\infty)^m = -\infty$ pro každé $m \in \mathbb{N}$ liché
  není definováno: $\underline{(\pm\infty)^0; 0^0}$

- m-tá odmocnina, kde $m \in \mathbb{N}$
  $\sqrt[m]{+\infty} = +\infty$ pro každé $m \in \mathbb{N}$
  $\sqrt[m]{-\infty} = -\infty$ pro každé $m \in \mathbb{N}$ liché
  není definováno: $\underline{\sqrt[m]{-\infty} \text{ pro } m \in \mathbb{N} \text{ liché}}$

2.4.4 Intervaly

V matematice se často využívají speciální podmnožiny množiny $\mathbb{R}$, které se nazývají *intervaly.*

Definice 2.10 Nechť jsou dány body $a, b \in \mathbb{R}$, kde $a \leq b$. Potom definujeme následující intervaly:

Název intervalu	Definice	Grafické znázornění
	Omezené intervaly s krajními body a a b	
uzavřený interval	$< a, b >= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$	
otevřený interval	$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$	
polouzavřený (polootevřený) interval	$< a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$ $(a, b >= \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$	
	Neomezené intervaly	
s krajním bodem a a nevlastním bodem ∞	$< a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < \infty\}$ $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < \infty\}$	
s krajním bodem a a nevlastním bodem $-\infty$	$(-\infty, a >= \{x \in \mathbb{R}; -\infty < x \leq a\}$ $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R}; -\infty < x < a\}$	
oboustranně neomezený interval	$(-\infty, \infty) = \{x \in \mathbb{R}; -\infty < x < \infty\}$ $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$	

Jestliže $a = b$, pak $< a, a >= \{a\}$, tj. je to jednobodová množina (tzv. *degenerovaný interval*), ostatní intervaly $< a, a)$, $(a, a >$ i (a, a) jsou prázdné.

2.4.5 Okolí bodu

Ve formulacích mnoha výsledků se pro zjednodušení a zpřehlednění používá tzv. *okolí bodu*, což je speciální typ otevřeného intervalu.

Definice 2.11 Nechť je dáno $c \in \mathbb{R}$ a $\delta \in \mathbb{R}^+$. Potom *δ-okolím bodu c* nazveme otevřený interval $(c - \delta, c + \delta)$. Číslo δ se nazývá poloměrem tohoto okolí. δ-okolí bodu c značíme $\mathcal{U}(c, \delta)$ nebo $\mathcal{U}_\delta(c)$.

δ-okolí bodu c lze vyjádřit více (ekvivalentními) způsoby:

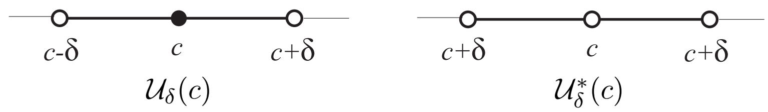
$$\mathcal{U}_\delta(c) = \{x \in \mathbb{R}; x \in (c - \delta, c + \delta)\} = \{x \in \mathbb{R}; c - \delta < x < c + \delta\} = \{x \in \mathbb{R}; |x - c| < \delta\}$$

Definice 2.12 Nechť je dáno $c \in \mathbb{R}$ a $\delta \in \mathbb{R}^+$. Potom *redukovaným δ-okolím bodu c* nazveme množinu $\mathcal{U}_\delta(c) \setminus \{c\}$. Číslo δ se nazývá poloměrem tohoto okolí. Redukované δ-okolí bodu c značíme $\mathcal{U}^*(c, \delta)$ nebo $\mathcal{U}^*_\delta(c)$.

Redukované δ-okolí bodu c lze opět vyjádřit více (ekvivalentními) způsoby:

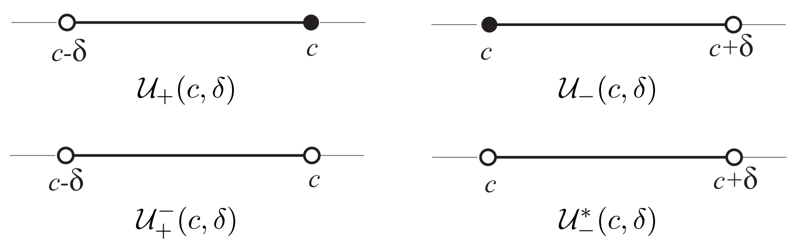
$$\begin{aligned}\mathcal{U}^*_\delta(c) &= \{x \in \mathbb{R}; x \in (c-\delta, c) \cup (c, c+\delta)\} = \{x \in \mathbb{R}; c-\delta < x < c \vee\ c < x < c+\delta\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}; 0 < |x-c| < \delta\}\end{aligned}$$

Grafické znázornění δ-okolí bodu c:



Definice 2.13 Nechť je dáno $c \in \mathbb{R}$ a $\delta \in \mathbb{R}^+$. Potom *pravým δ-okolím bodu c* nazveme polootevřený interval $< c, c+\delta)$ a *levým δ-okolím bodu c* polootevřený interval $(c-\delta, c >$. Tato tzv. *jednostranná δ-okolí bodu c* značíme $\mathcal{U}_+(c,\delta)$ a $\mathcal{U}_-(c,\delta)$. Analogicky definujeme *jednostranná redukovaná okolí*, a to *pravé redukované δ-okolí bodu c* jako $\mathcal{U}^*_+(c,\delta) = (c, c+\delta)$ a *levé redukované δ-okolí bodu c* jako $\mathcal{U}^*_-(c,\delta) = (c-\delta, c)$.

Grafické znázornění jednostranných δ-okolí bodu c:



Definice 2.14 Nechť je dáno $s \in \mathbb{R}$. *s-okolím nevlastního bodu ∞* nazveme otevřený interval (s,∞) a označíme ho $\mathcal{U}(\infty, s)$. *s-okolím nevlastního bodu $-\infty$* nazveme otevřený interval $(-\infty, s)$ a označíme ho $\mathcal{U}(-\infty, s)$.

Grafické znázornění s-okolí nevlastních bodů ∞ a $-\infty$:

Poznámka: V názvu i označení δ-okolí, resp. s-okolí, lze čísla δ, resp. s, vypouštět, není-li jejich velikost podstatná.
Poznámka: Existují i jiné podmnožiny množiny $\mathbb{R}$, které mají složitější strukturu.

2.4.6 Vlastnosti podmnožin v $\mathbb{R}$

V celém odstavci budeme předpokládat, že M je neprázdná podmnožina množiny $\mathbb{R}$.

Definice 2.15 Množina M se nazývá

- *omezená shora*, jestliže existuje $k \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ platí $x \leq k$. Číslo k se nazývá *horní mez (závora) množiny M.*
- *omezená zdola*, jestliže existuje $l \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ platí $x \geq l$. Číslo l se nazývá *dolní mez (závora) množiny M.*
- *omezená*, jestliže je omezená shora i zdola zároveň.

Věta 2 *Množina M je omezená právě tehdy, když existuje číslo $K \in \mathbb{R}^+_0$ takové, že pro všechna $x \in M$ platí $|x| \leq K$.*

Definice 2.16 Nechť existuje takové $m \in M$, že pro všechna $x \in M$ platí $x \leq m$. Pak se toto číslo m nazývá *maximum* (nebo *největší prvek*) *množiny* M a značí se $\max M$.
Nechť existuje takové $n \in M$, že pro všechna $x \in M$ platí $x \geq m$. Pak se toto číslo n nazývá *minimum* (nebo *nejmenší prvek*) *množiny* M a značí se $\min M$.

Poznámka: Je-li množina M shora (zdola) omezená, pak její horní (dolní) mez může ale nemusí do M patřit. Pokud však existuje maximum (minimum) množiny M, vždy do této množiny patří.

Věta 3 *Pro konečnou množinu lze vždy nalézt její maximum i minimum.*

Definice 2.17 Číslo $p \in \mathbb{R}$ se nazývá *supremum množiny* M (značí se $\sup M$), jestliže

(s1) pro všechna $x \in M$ platí $x \leq p$ a

(s2) ke každému $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existuje $\bar{x} \in M$ takové, že $\bar{x} > p - \varepsilon$.

Poznámky:

- Podle vlastnosti (s1) je p horní mez množiny M a podle (s2) neexistuje žádná další horní mez menší než p. Supremum je tedy nejmenší horní mezí množiny M.
- Supremum nemusí vždy existovat.
- Jestliže existuje $\sup M$ a jestliže navíc $\sup M \in M$, pak existuje i $\max M$ a platí $\max M = \sup M$.
- Jestliže existuje $\sup M$, ale $\sup M \notin M$, pak $\max M$ neexistuje.

Definice 2.18 Číslo $q \in \mathbb{R}$ se nazývá *infimum množiny* M (značí se $\inf M$), jestliže

(i1) pro všechna $x \in M$ platí $x \geq q$ a

(i2) ke každému $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existuje $\hat{x} \in M$ takové, že $\hat{x} < q + \varepsilon$.

Pro infimum platí obdobná poznámka jako ta výše uvedená pro supremum.

Věta 4 (existenci suprema a infima množiny) *Jestliže je množina M omezená shora, pak existuje její supremum v $\mathbb{R}$. Jestliže je množina M omezená zdola, pak existuje její infimum v $\mathbb{R}$.*

Věta 5 *Jestliže existuje $\max M$, pak existuje i $\sup M$ a platí $\sup M = \max M$. Analogicky, jestliže existuje $\min M$, pak existuje také $\inf M$ a platí $\inf M = \min M$.*

2.4.7 Vztah mezi množinou a bodem

Definice 2.19 Nechť M je neprázdná podmnožina v $\mathbb{R}$.

- Bod $a \in M$ se nazývá *vnitřním bodem M*, jestliže existuje jeho okolí $\mathcal{U}(a)$ celé obsažené v M, tj. $\mathcal{U}(a) \subset M$. Množina všech vnitřních bodů množiny M se nazývá *vnitřek množiny M* a značí se M° nebo $\operatorname{int} M$.
- Bod $a \in \mathbb{R}$ se nazývá *hraničním bodem M*, jestliže v každém jeho okolí $\mathcal{U}(a)$ leží aspoň jeden bod množiny M a aspoň jeden bod množiny $\mathbb{R} \setminus M$. Množina všech hraničních bodů množiny M se nazývá *hranice množiny M* a značí se $h(M)$, hM nebo δM.
- *Uzávěrem množiny M* nazveme sjednocení hranice množiny M a jejího vnitřku a označíme ho jako $\overline{M}$. Tj. $\bar{M} = M^\circ \cup h(M)$.
- Bod $a \in \mathbb{R}$ se nazývá *vnějším bodem M*, jestliže není ani vnitřním ani hraničním bodem množiny M. Množina všech vnějších bodů mn. M se nazývá *vnějšek množiny M*, nemá speciální označení a je tvořen množinou $\mathbb{R} \setminus \overline{M}$.
- Bod $a \in \mathbb{R}$ se nazývá *hromadným bodem M*, jestliže v každém jeho okolí $\mathcal{U}(a)$ leží nekonečně mnoho bodů množiny M. Množina všech hromadných bodů množiny M se nazývá *derivace množiny M* a značí se M'.

  Bod $a \in \mathbb{R}$ se nazývá *hromadným bodem M zprava*, jestliže v každém jeho pravém okolí $\mathcal{U}_+(a)$ leží nekonečně mnoho bodů množiny M.

  Bod $a \in \mathbb{R}$ se nazývá *hromadným bodem M zleva*, jestliže v každém jeho levém okolí $\mathcal{U}_-(a)$ leží nekonečně mnoho bodů množiny M.
- *Izolovaným bodem množiny M* nazveme každý bod množiny M, který není jejím hromadným bodem.

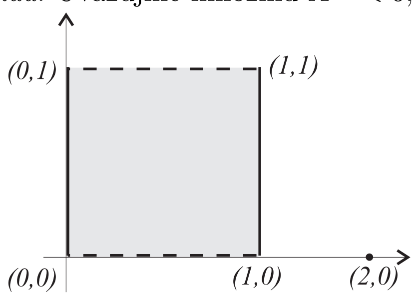
Definice 2.20 Nechť M je neprázdná podmnožina v $\mathbb{R}$.

- Jestliže $M = M^{\circ}$, pak se množina M nazývá *otevřená*.
- Jestliže $M = \overline{M}$, pak se množina M nazývá *uzavřená*.
- Množina M se nazývá *izolovaná* (nebo *diskrétní*), jestliže všechny její prvky jsou izolovanými body.

Poznámky: Přímo z výše uvedených definic plyne

- Vnitřní a izolované body množiny M vždy do M patří. Hraniční a hromadné body do M patřit mohou, ale nemusí.
- Množina M je otevřená právě tehdy, když neprotíná svoji hranici, tj. když $M \cap h(M) = \emptyset$. Vnitřními body jsou právě ty body z M, které nejsou hraniční.
- Množina M je uzavřená právě tehdy, když obsahuje svoji hranici, tj. když $h(M) \subset M$.
- Hromadný bod množimy M je zároveň i jejím hraničním bodem; ne každý hraniční bod množiny M však musí být i jejím hromadným bodem.

Příklad: Uvažujme množinu $A =< 0,1 > \times (0,1) \cup \{(2,0)\}$ (viz obrázek).



- vnitřní body jsou všechny z množiny $(0,1) \times (0,1)$
- hranice je tvořena stranami čtverce a bodem $(2,0)$
- uzávěr $= < 0,1 >^2 \cup (2,0)$
- vnější body jsou všechny body z $\mathbb{R}$ kromě těch z množiny $< 0,1 >^2 \cup (2,0)$
- hromadné body jsou všechny body z $< 0,1 >^2$
- $(2,0)$ je hraniční bod, ale není hromadný bod
- $(2,0)$ je izolovaný bod
- množina A není otevřená, uzavřená ani diskrétní