Funkce tří proměnných

Příklad 1. Určete definiční obor funkce $f(x,y,z)$

a) $f(x,y,z)=\sqrt{1+x^2-y^2-z^2}$
$[D_f=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; z^2\le y^2-x^2-1\}\ ]$

b) $f(x,y,z)=\ln(-x^2-y^2+2z)$
$[D_f=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; z>\frac{1}{2}(x^2+y^2)\}\ ]$

c) $f(x,y,z)=\sqrt{1-x}+\sqrt{y+3}-\sqrt{z}$
$[D_f=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; x\le 1, y\ge -3, z\ge 0\}\ ]$

d) $f(x,y,z)=\arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$
$[D_f=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; |z|\le\sqrt{x^2+y^2}\}\setminus\{(0,0,z)\in\mathbb{R}^3; z\in\mathbb{R}\}\ ]$

Příklad 2. Určete parciální derivace 1. řádu pro funkce $f(x,y,z)$

a) $f(x,y,z)=e^{x^2(1-y-z)}$
$[f'_x=2x(1-y-z)e^{x^2(1-y-z)},\ f'_y=-x^2e^{x^2(1-y-z)}=f'_z]$

b) $f(x,y,z)=3x^2yz-6xz+2y^3z^2$
$[f'_x=6xyz-6z^2,\ f'_y=3x^2z+6y^2z^2,\ f'_z=3x^2y-6x+4y^3z]$

c) $f(x,y,z)=x^{\frac{y}{z}}$
$[f'_x=\frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1},\ f'_y=\frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x,\ f'_z=-\frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln x]$

d) $f(x,y,z)=\sin(x^2+y^2+z^2)$
$[f'_x=2x\cos(x^2+y^2+z^2),\ f'_y=2y\cos(x^2+y^2+z^2),\ f'_z=2z\cos(x^2+y^2+z^2)]$

Příklad 3.

a) Vypočtěte parc. derivaci f'_z v bodě $(0,0,\frac{\pi}{4})$, jestliže $f(x,y,z)=\sqrt{\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z}$
$[f'_z=\frac{\sin 2z}{\sqrt{\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z}},\ f'_z(0,0,\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}]$

b) Vypočtěte $f'_x+f'_y+f'_z$ v bodě (1,1,1) pro funkci $f(x,y,z)=\ln(1+x+y^2+z^3)$
$[f'_x+f'_y+f'_z=\frac{1+2y+3z^2}{1+x+y^2+z^3},\ (f'_x+f'_y+f'_z)(1,1,1)=\frac{3}{2}]$

Příklad 4. Určete totální diferenciál 1. řádu pro funkci $f(x,y,z)=\frac{z}{x^2+y^2}$

a) v libovolném bodě (x,y,z)
$[df(x,y,z)=\frac{1}{(x^2+y^2)^2}\left(-2xz\cdot dx-2yz\cdot dy+(x^2+y^2)\cdot dz\right)]$

b) v bodě (1,0,1)
$[df(1,0,1)=-2dx+dz]$

Příklad 5. Pomocí diferenciálu přibližně vypočtěte $\frac{1{,}03}{\sqrt[3]{0{,}98\cdot(1{,}05)^4}}$

$[f(x,y,z)=\frac{x}{\sqrt[3]{yz^4}}$, $(x_0,y_0,y_0)=(1,1,1)$, $dx=0,03$, $dy=-0,02$, $dz=0,05$, $\frac{1{,}03}{\sqrt[3]{0{,}98\cdot(1{,}05)^4}}\approx f(1,1,1)+f'_x(1,1,1)dx+f'_y(1,1,1)dy+f'_z(1,1,1)dz=1+1\cdot 0,03+\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot(-0,02)+\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot 0,05=\frac{287}{300}=0,9566666...]$

Příklad 6. Určete lokální extrémy funkce $f(x,y,z)$

a) $f(x,y,z)=x^3+y^2+\frac{1}{2}z^2-3xz-2y+2z$
[Stac. bod (1,1,1) - není extrém; (2,1,4) - l.min]

b) $f(x,y,z)=x+\frac{y^2}{4x}+\frac{z^2}{y}+\frac{2}{z}$
[$(\frac{1}{2},1,1)$ - o.l.min; $(-\frac{1}{2},-1,-1)$ - o.l.max]

c) $f(x,y,z)=x^3+y^2+z^2+12xy+2z$
[(0,0,-1) - není extrém; (24,-144,-1) - l.min]

Příklad 7. Určete vázané lokální extrémy funkce $f(x,y,z)$

a) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ za podmínek $x+y-3z+7=0$ a $x-y+z-3=0$
[(0,-1,2) - v.l.min]

b) $f(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$, kde $a>b>c>0$. za podmínky $x^2+y^2+z^2=1$
[$(\pm 1,0,0)$ - o.v.l.min; $(0,0,\pm 1)$ - o.v.l.max; $(0,\pm 1,0)$ - není extrém]

Příklad 8. Nalezněte rozměry kvádru největšího objemu, jestliže délka jeho tělesové úhlopříčky je $2\sqrt{3}$.

[Je to krychle o straně délky 2.]