III. Funkce tří proměnných

Všechny úvahy, které jsme vedli pro funkce dvou proměnných se dají snadno modifikovat pro funkce tří proměnných. Jedinou odlišností je, že se posunujeme o jednu dimenzi výše, tj. přibude navíc jedna nezávisle proměnná.

1 Základní pojmy

Definice 1.1 *δ-okolím bodu* $X_0 = (x_0, y_0, y_0) \in \mathbb{R}^3$ se nazývá otevřená koule se středem v bodě X_0 a poloměrem δ, tj. množina

$$\mathcal{U}_\delta(X_0) = \mathcal{U}_\delta(x_0, y_0, z_0) = \{X \in \mathbb{R}^3;\ \rho(X_0, X) < \delta\}$$

a *redukovaným δ-okolím bodu* $X_0 = (x_0, y_0, y_0) \in \mathbb{R}^3$ se nazývá otevřená koule se středem v bodě X_0 a poloměrem δ, z níž je vyjmut bod X_0, tj. množina

$$\mathcal{U}^*_\delta(X_0) = \mathcal{U}^*_\delta(x_0, y_0, z_0) = \{X \in \mathbb{R}^3;\ 0 < \rho(X_0, X) < \delta\},$$

kde ρ je metrika na $\mathbb{R}^3$.

Definice 1.2 Zobrazení f z množiny $\mathbb{R}^3$ do množiny $\mathbb{R}$ se nazývá *reálná funkce tří reálných proměnných*, zapisujeme $f = f(x, y, z)$.

Poznámka: Uvědomte si, že $\mathrm{D}_f \subset \mathbb{R}^3$, $\mathrm{H}_f \subset \mathbb{R}$ a graf $f \subset \mathbb{R}^4$.

2 Limita a spojitost

Definují se obdobně jako u funkce dvou proměnných jen s tím rozdílem, že uvažujeme i třetí souřadnici. Například

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x, y, z) = L \in \mathbb{R} \iff$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall (x, y, z) \in \mathcal{U}^*_\delta(x_0, y_0, z_0) \cap \mathrm{D}_f\ :\ |f(x, y, z) - L| < \varepsilon$$

V hromadném bodě (x_0, y_0, z_0) definičního oboru pak můžeme spojitost funkce f v tomto bodě definovat pomocí limity:

$$f \text{ je spojitá v bodě } (x_0, y_0, z_0) \iff \lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0)$$

Pojem spojitosti lze opět rozšířit z bodu na množinu.

Platí analogické věty o limitách a spojitosti jako v případě funkcí dvou proměnných.

3 Parciální derivace

Princip parciálních derivací je stejný jako u funkce dvou proměnných. Zvolíme si jednu z proměnných, podle které budeme derivovat, a obě dvě ostatní proměnné považujeme za konstanty.

Definice 3.1 Nechť f je funkce tří proměnných a nechť bod (x_0, y_0, z_0) je vnitřním bodem D_f. Dosadíme-li za y pevnou hodnotu y_0 a za z pevnou hodnotu z_0, dostaneme funkci jedné proměnné $\varphi(x) = f(x, y_0, z_0)$. Má-li funkce φ derivaci v bodě x_0, tzn. existuje-li limita

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{x - x_0},$$

říkáme, že *funkce f má v bodě (x_0, y_0, z_0) parciální derivaci podle proměnné x*. Značíme $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)$ nebo $f'_x(x_0, y_0, z_0)$.

Analogicky definujeme derivace podle proměnné y a proměnné z.

Pojem parciálních derivací lze opět rozšířit z bodu na množinu a považovat f'_x, f'_y a f'_z za funkce tří proměnných.

Derivace vyšších řádů pak definujeme analogicky, platí i věta o záměnnosti smíšených parciálních derivací vyšších řádů.

3.1 Totální diferenciál

Totální diferenciál se opět používá k přibližnému výpočtu hodnot funkce v okolí zvoleného bodu (x_0, y_0, z_0). Definice je odbobná jako u funkcí dvou proměnných, pouze s tím rozdílem, že v jeho vyjádření přibude výraz pro třetí souřadnici, tj.

$$\mathrm{d}f(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathrm{d}z$$

4 Extrémy funkce tří proměnných

Extrémy jsou definovány stejně jako u funkce dvou proměnných, opět rozlišujeme tři typy extrémů (lokální, vázané, globální), například:

Definice 4.1 Říkáme, že funkce f má v bodě $X_0 = (x_0, y_0, z_0) \in D_f$ *lokální maximum*, jestliže existuje okolí $\mathcal{U}(X_0)$ bodu X_0 takové, že pro všechny body $X = (x, y, z) \in \mathcal{U}(X_0)$ platí $f(X_0) \geq f(X)$.

4.1 Lokální extrémy

Věta 4.1 (Nutná podmínka existence lokálního extrému) *Nechť má funkce f v bodě (x_0, y_0, z_0) lokální extrém. Existují-li v bodě (x_0, y_0, z_0) parciální derivace prvního řádu, pak jsou rovny nule, tj.*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Bod (x_0, y_0, z_0), v němž jsou všechny parciální derivace rovny nule se nazývá stacionární bod funkce f.

Věta 4.2 (Postačují podmínka existence lokálního extrému) *Nechť má funkce f na okolí bodu $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$ spojité parciální derivace druhého řádu. Označme*

$$D_1 = f''_{xx}(X_0), \quad D_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx}(X_0) & f''_{xy}(X_0) \\ f''_{yx}(X_0) & f''_{yy}(X_0) \end{vmatrix} \quad \text{a} \quad D_3 = \begin{vmatrix} f''_{xx}(X_0) & f''_{xy}(X_0) & f''_{xz}(X_0) \\ f''_{yx}(X_0) & f''_{yy}(X_0) & f''_{yz}(X_0) \\ f''_{zx}(X_0) & f''_{zy}(X_0) & f''_{zz}(X_0) \end{vmatrix}.$$

Potom

a) je-li $D_1 > 0$, $D_2 > 0$ a $D_3 > 0$, funkce f má v X_0 ostré lokální minimum;

b) je-li $D_1 < 0$, $D_2 > 0$ a $D_3 < 0$, funkce f má v X_0 ostré lokální maximum;

Poznámka: Jestliže pro determinanty neplatí a) ani b), extrém nenastane. Je-li některý z determinantů roven nule a ostatní mají znaménko jak je uvedeno v a) nebo b), pak extrém může, ale nemusí nastat. V tomto případě je nutné postupovat podle definice extrémů.

4.2 Vázané lokální extrémy

I u funkcí tří proměnných můžeme určovat vázané lokální extrémy, přičemž mohou být dány jedna nebo dvě vazby (obecně u funkcí n proměnných může být nejvýše $(n-1)$ vazeb)

Pokud jsou vazební podmínky "hezké" (tj. lze vyjádřit některá z proměnných jako funkce dvou zbývajících), pak v případě jedné vazby přejde úloha nalézt vázené extrémy funkce tří proměnných na úlohu najít lokální extrémy funkce dvou proměnných, pro dvě vazby pak v úlohu najít lokální extrémy funkce jedné proměnné. Pokud z podmínek nelze žádnou proměnnou explicitně vyjádřit, použijeme Lagrangeovu metodu neurčitých koeficientů, případně pak kombinaci obou výše zmíněných metod.

4.3 Globální extrémy

I pro funkce tří proměných platí Weierstrassova věta: *pokud je funkce f spojitá na uzavřené omezené množině $\Omega \subset D_f \subset \mathbb{R}^3$, nabývá na množině Ω svého maxima a minima* (tj. existují body $A, B \in \Omega$ tak, že $f(A) \le f(X) \le f(B)$ pro všechny $X = (x, y, z) \in \Omega$.)

Body, v nichž by mohl nastat globální extrém jsou body uvnitř Ω podezřelé z lokálních extrémů a body na hranici Ω podezřelé z vázaných lokálních extrémů.