Příklad 1. Vyšetřete konvergenci/divergenci číselné řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \qquad [konv.]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{(n+7)!} \qquad [konv.]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n} \qquad [div.]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}} \qquad [div.]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n} \qquad [div.]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{n!} \qquad [konv.]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln n} \qquad [div.]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \qquad [konv.]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\ln n} \qquad [div.]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+7)!}{7^n n!} \qquad [konv.]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right) \qquad [div.]$$

Příklad 2. Vyšetřete absolutní/relativní konvergenci číselné řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \qquad [abs.konv.]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{2n} \qquad [div.]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)^3} \qquad [abs.konv.]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3n+1} \qquad [rel.konv.]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2+(-1)^n}{n} \qquad [div.]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{2^n} \qquad [abs.konv.]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2} \qquad [abs.konv.]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{2n+1}{3n-1}\right)^n \qquad [abs.konv.]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}} \qquad [div.]$$

Příklad 3. Určete obor konvergence funkcionální řady:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\ln x)^n \qquad \left[OK = \left(\frac{1}{e}, e\right)\right]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n+1}\frac{1}{(3x^2+4x+2)^2} \qquad [OK = (-\infty,-1)\cup(-1/3,\infty)]$$

Příklad 4. Pomocí Weierstrassova kritéria dokažte stejnoměrnou konvergenci následujících řad na I:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^4} \qquad I =< -1, 1 >$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-x^2n^2}}{n^2} \qquad I = \mathbb{R}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+n)(x+n+1)} \qquad I =< 0, \infty)$$

Příklad 5. Určete poloměr a obor konvergence mocninných řad:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}x^n \qquad [r = 1, OK = (-1, 1)]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n3^{n-1}} \qquad [r = 3, OK =< -3, 3)]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2\sqrt{n}} \qquad [r = 1, OK =< 0, 2 >]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}n(n+2)(x+1)^n \qquad [r = 1, OK = (-2, 0)]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{n!} \qquad [r = \infty, OK = \mathbb{R}]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n}(x-3)^n \qquad [r=0, OK=\{3\}]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^{n+1}}{n(n+3)} \qquad [r=1, OK=<-3,-1>]$$

Příklad 6. Rozviňte následující funkce v Taylorovy řady se středem v x_0:

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad x_0 = -2$$

$$\left[\frac{1}{x} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}(x+2)^n \qquad x \in (-4, 0)\right]$$

$$f(x) = \cos x \quad x_0 = 0$$

$$\left[\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad x \in \mathbb{R}\right]$$

$$f(x) = \frac{1}{3-2x} \quad x_0 = 0$$

$$\left[\frac{1}{3-2x} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n x^n \qquad x \in <-2/3, 2/3>\right]$$

$$f(x) = \ln(1+x) \quad x_0 = 0$$

$$\left[\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \qquad x \in (-1, 1>\right]$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad x_0 = 0$$

Návod: využijte rovnosti $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$ a předchozího výsledku

$$\left[\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \qquad x \in (-1, 1)\right]$$