♣ Vyšetříme funkci $f(x)$: $f(x) = \frac{2x^3}{x^2-1}$.

1. Stanovme definiční obor funkce $D(f)$ a zjistíme, ve kterých bodech je funkce spojitá $D(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$.

2. Počítáme

$$f(-x) = \frac{2(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = -\frac{2(x)^3}{(x)^2 - 1} = -f(x)$$

funkce je lichá, není periodická

3. Vyšetříme body nespojitosti ± 1, v těchto bodech určíme jednostranné limity:

- $$\lim_{x\to 1^-} \frac{2x^3}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{2x^3}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{2x^3}{(x+1)} \cdot \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{(x-1)} =$$
$$= 1 \cdot (-\infty) = -\infty,$$
- $$\lim_{x\to 1^+} \frac{2x^3}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x^3}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x^3}{(x+1)} \cdot \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{(x-1)} =$$
$$= 1 \cdot (+\infty) = \infty,$$
- $$\lim_{x\to -1^-} \frac{2x^3}{x^2-1} = \lim_{x\to -1^-} \frac{2x^3}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to -1^-} \frac{2x^3}{(x-1)} \cdot \lim_{x\to -1^-} \frac{1}{(x+1)} =$$
$$= 1 \cdot (-\infty) = -\infty,$$
- $$\lim_{x\to -1^+} \frac{2x^3}{x^2-1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{2x^3}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to -1^+} \frac{2x^3}{(x-1)} \cdot \lim_{x\to -1^+} \frac{1}{(x+1)} =$$
$$= 1 \cdot (\infty) = \infty.$$

4. Asymptoty grafu funkce bez směrnice jsou přímky $x = -1$ a $x = 1$.
Asymptoty se směrnicí:

$$y = kx + q,$$

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2-1} = 2,$$

$$q = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 - 2x(x^2-1)}{x^2-1} = \frac{2x}{x^2-1} = 0.$$

Existuje tedy jediná asymptota se směrnicí $y = 2x$.

5. Intervaly monotonnosti určíme pomocí první derivace:

$$f'(x) = \frac{6x^2(x^2-1) - 2x^3(2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{6x^4 - 6x^2 - 4x^4}{(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{2x^4 - 6x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}.$$

- Pro rostoucí funkci platí, že $f'(x) > 0$:

$$f'(x) = \frac{2x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} > 0, \qquad 2x^2(x^2-3) > 0,$$

funkce je tedy rostoucí na intervalech $(-\infty, -\sqrt{3})$ a $(-\sqrt{3}, -\infty)$.

- Pro funkci klesající platí, že $f'(x) < 0$:

$$f'(x) = \frac{2x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} < 0, \qquad 2x^2(x^2-3) < 0,$$

a klesající na intervalech $(-\sqrt{3}, -1)$ a $(-1, 1)$ a $(1, -\sqrt{3})$.

6. Lokální extrémy funkce vypočítáme ze vztahu $f'(x) = 0$

$$f'(x) = \frac{2x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} = 0, \qquad 2x^2(x^2-3) = 0,$$

funkce tedy nabývá lokálních extrému ve stacionárních bodech $\pm\sqrt{3}$ a 0. Zda funkce nabývá lokálního maxima ($f''(x_s) < 0$) či lokálního minima ($f''(x_s) > 0$) ve stacionárních bodech určíme pomocí druhé derivace:

$$f''(x) = \frac{2\{[2x(x^2-3) + x^2(2x)](x^2-1)^2 - x^2(x^2-3)[2(x^2-1)(2x)]\}}{[(x^2-1)^2]^2} =$$

$$= \frac{[(8x^3 - 12x)(x^2-1)^2 - (2x^4 - 6x^2)(x^2-1)(4x)]}{[(x^2-1)^2]^2} =$$

$$= \frac{[(8x^3 - 12x)(x^2-1) - (2x^4 - 6x^2)(4x)]}{(x^2-1)^3} =$$

$$= \frac{8x^5 - 8x^3 - 12x^3 + 12x - 8x^5 + 24x^3}{(x^2-1)^3} =$$

$$= \frac{4x^3 + 12x}{(x^2-1)^3} = \frac{4x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}.$$

Tedy,

$$f''(\sqrt{3}) = \frac{4\sqrt{3}[(\sqrt{3})^2+3]}{[(\sqrt{3})^2-1]^3} = \frac{4\sqrt{3}(3+3)}{(3-1)^3} = 3\sqrt{3} \geq 0$$

ve stacionárním bodě je lokálního minimum,

$$f''(-\sqrt{3}) = \frac{4(-\sqrt{3})[(-\sqrt{3})^2+3]}{[(-\sqrt{3})^2-1]^3} = \frac{4(-\sqrt{3})(3+3)}{(3-1)^3} = -3\sqrt{3} \leq 0$$

ve stacionárním bodě je lokální maximum.

Hodnoty funkce ve stacionárních bodech, dosadíme do zadání:

$$f(\sqrt{3}) = \frac{2(\sqrt{3})^3}{(\sqrt{3})^2-1} = 3\sqrt{3}$$

$$f(-\sqrt{3}) = \frac{2(-\sqrt{3})^3}{(-\sqrt{3})^2-1} = -3\sqrt{3}$$

POZN: je zajímavé, že lokální maximum nabývá menší hodnoty než lokální minimum.

7. Intervaly, kde je funkce konkávní ($f''(x) < 0$) či konvexní ($f''(x) > 0$), určíme také pomocí druhé derivace:

   - $$f''(x) = \frac{4x(x^2+3)}{(x^2-1)^3} > 0$$

     $$[4x(x^2+3) > 0 \wedge (x^2-1)^3 > 0] \vee [4x(x^2+3) < 0 \wedge (x^2-1)^3 < 0]$$

   - $$f''(x) = \frac{4x(x^2+3)}{(x^2-1)^3} < 0$$

     $$[4x(x^2+3) < 0 \wedge (x^2-1)^3 > 0] \vee [4x(x^2+3) > 0 \wedge (x^2-1)^3 < 0]$$

     Podle znamének určíme, že funkce je konvexní na intervalech $(-1,0)$,$(1,\infty)$ a konkavní na intervalech $(-\infty,-1)$,$(0,1)$.

   - Inflexní body z druhé derivace $f''(x) = 0$:

     $$f''(x) = \frac{4x(x^2+3)}{(x^2-1)^3} = 0 \qquad 4x(x^2+3) = 0$$

     Funkce má tedy jediný inflexní bod v $x = 0$.

♣ Vyšetříme funkci $f(x)$: $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$

1. Stanovme definiční obor funkce $D(f)$ a zjistíme,ve kterých bodech je funkce spojitá $D(f) = (-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,\infty)$.

2. Počítáme

$$y(-x) = \frac{1+(-x)^2}{1-(-x)^2} = \frac{1+x^2}{1-x^2} = y(x),$$

funkce je sudá, není periodická.

POZN: funkce je sudá, mužeme se proto omezit jen na vyšetřovaní nezáporné časti(graf je souměrný dle osy y).

3. Vyšetříme body nespojitosti $x = \pm 1$ a v těchto bodech jednostranné limity:

- $$\lim_{x\to -1^-} \frac{1+x^2}{1-x^2} = \lim_{x\to -1^-} \frac{1+x^2}{(1-x)(1+x)} = \lim_{x\to -1^-} \frac{1+x^2}{1-x} \cdot \lim_{x\to -1^-} \frac{1}{1+x} =$$
  $$= 1 \cdot (-\infty) = -\infty,$$
- $$\lim_{x\to -1^+} \frac{1+x^2}{1-x^2} = \lim_{x\to -1^+} \frac{1+x^2}{(1-x)(1+x)} = \lim_{x\to -1^+} \frac{1+x^2}{1-x} \cdot \lim_{x\to -1^-} \frac{1}{1+x} =$$
  $$= 1 \cdot (+\infty) = \infty,$$
- $$\lim_{x\to 1^-} \frac{1+x^2}{1-x^2} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1+x^2}{(1-x)(1+x)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1+x^2}{1+x} \cdot \lim_{x\to -1^-} \frac{1}{1-x} =$$
  $$= 1 \cdot (\infty) = \infty,$$
- $$\lim_{x\to 1^+} \frac{1+x^2}{1-x^2} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1+x^2}{(1-x)(1+x)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1+x^2}{1+x} \cdot \lim_{x\to -1^-} \frac{1}{1-x} =$$
  $$= 1 \cdot (-\infty) = -\infty,$$

asymtoty grafu funkce bez směrnice jsou přímky $x = -1$ a $x = 1$. Asymptoty se směrnicí:

$$y = kx + q,$$

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{1+x^2}{x(1-x^2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x})}{x^3(\frac{1}{x^2}-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x})}{(\frac{1}{x^2}-1)} = \frac{0}{-1} = 0,$$

$$q = \lim_{x\to\infty} \frac{1+x^2}{1-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(\frac{1}{x^2}+1)}{x^2(\frac{1}{x^2}-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\frac{1}{x^2}+1)}{(\frac{1}{x^2}-1)} = -1,$$

existuje tedy jediná asymptota se směrnicí $y = -1$.

4. Intervaly monotonnosti určíme pomocí první derivace:

$$y'(x) = \frac{2x(1-x^2)-(1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2x-2x^3+2x+2x^3}{(1-x^2)^2} = \frac{4x}{(1-x^2)^2}.$$

- Pro rostoucí funkci platí, že $f'(x) > 0$:

  $$f'(x) = \frac{4x}{(1-x^2)^2} > 0, \qquad 4x > 0,$$

  funkce je rostoucí na intervalech $(0,1)$ a $(1,\infty)$
- Pro funkci klesající platí, že $f'(x) < 0$:

  $$f'(x) = \frac{4x}{(1-x^2)^2} < 0, \qquad 4x < 0,$$

  a klesající na intervalech $(-\infty,-1)$ a $(-1,0)$.

5. Lokální extrémy funkce vypočítáme ze vztahu $f'(x) = 0$

$$f'(x) = \frac{4x}{(1-x^2)^2} = 0, \qquad 4x = 0$$

funkce tedy nabývá lokálního extrému ve stacionárním bodě $x = 0$. Zda funkce nabývá lokálního maxima ($f''(x_s) < 0$) či lokálního minima ($f''(x_s) > 0$) určíme pomocí druhé derivace

$$f''(x) = \frac{4(1-x^2)^2 - 4x(2)(1-x^2)(-2x)}{(1-x^2)^4} =$$

$$= \frac{4(1-x^2) - 8x(-2x)}{(1-x^2)^3} =$$

$$= \frac{4-4x^2+16x^2}{(1-x^2)^3} =$$

$$= \frac{4(3x^2+1)}{(1-x^2)^3}.$$

Tedy,

$$f''(0) = \frac{4[3(0)^2+1]}{[1-(0)^2]^3} = 4 \geq 0$$

ve stacionárním bodě $x = 0$ je lokální minimum.
Hodnotu funkce ve ve stacionárním bodě, dosadíme do zadání:

$$f(0) = \frac{1+(4)^2}{1-(4)^2} = \frac{1+0}{1-0} = 1$$

hodnota funkce v lokálním extrému je rovna 1.

6. Intervaly, kde je funkce konkávní ($f''(x) < 0$) či konvexní($f''(x) > 0$), určíme také pomocí druhé derivace:

$$y''(x) = \frac{4(3x^2+1)}{(1-x^2)^3}$$

- $$y''(x) = \frac{4(3x^2+1)}{(1-x^2)^3} > 0,$$

  $$[4(3x^2+1) > 0 \wedge (1-x^2)^3 > 0] \vee [4(3x^2+1) < 0 \wedge (1-x^2)^3 < 0],$$

  funkce je konvexní na intervalu $(-1, 1)$.

- $$y''(x) = \frac{4(3x^2+1)}{(1-x^2)^3} < 0,$$

  $$[4(3x^2+1) > 0 \wedge (1-x^2)^3 < 0] \vee [4(3x^2+1) < 0 \wedge (1-x^2)^3 > 0],$$

  a konkávní na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(1, \infty)$.

- Inflexní body z druhé derivace $f''(x) = 0$:

  $$f''(x) = \frac{4(3x^2+1)}{(1-x^2)^3} = 0, \qquad 4(3x^2+1) = 0,$$

  funkce nemá žádný inflexní bod.