II. Posloupnosti

Obsah

1 Definice a základní vlastnosti posloupností

Posloupnost je zvláštním případem funkce (viz další kapitola), která je definována na diskrétní množině, konkrétně na množině všech přirozených čísel $\mathbb{N}$.

Posloupnosti nám poslouží k zavedení základních pojmů matematické analýzy, tj. limity, konvergence atp., které pak zobecníme pro funkce.

Definice 1.1 Zobrazení množiny $\mathbb{N}$ do množiny $\mathbb{R}$ nazýváme *posloupností reálných čísel* (nebo jen *posloupností*). Posloupnost, kterou každému $n \in \mathbb{N}$ přiřadíme číslo $a_n \in \mathbb{R}$, zapisujeme

$$\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\} \quad \text{nebo} \quad \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \quad \text{nebo jen} \quad \{a_n\}.$$

Číslo a_n se nazývá *n-tý člen posloupnosti* $\{a_n\}$, číslo n se nazývá *index členu a_n posloupnosti* $\{a_n\}$.

Poznámka: Obecně lze definovat posloupnost jako zobrazení množiny $\mathbb{N}$ do libovolné (neprázdné) množiny M; pokud např. $M = \mathbb{C}$, dostaneme posloupnost komplexních čísel.

Poznámka:

- posloupnost $\{a_n\}$ je zobrazení a má nekonečně mnoho členů
- množina $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ hodnot posloupnosti je číselná množina; má buď nekonečně mnoho prvků, nebo konečně mnoho prvků

Definice 1.2 Zobrazení množiny $\{1, 2, 3, \ldots, m\}$, kde $m \in \mathbb{N}$, do množiny $\mathbb{R}$ se nazývá *konečná posloupnost reálných čísel* (nebo jen *konečná posloupnost*). Značíme ji

$$\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m\} \quad \text{nebo jen} \quad \{a_n\}_{n=1}^{m}$$

1.1 Způsoby zadávání posloupnosti

- *vzorcem pro n-tý člen* (pokud existuje)
- *rekurentně*, tj. n-tý člen je vyjádřen pomocí jednoho nebo více předchozích členů; nutno dodat počáteční podmínky
- *výčtem všech členů* - lze pouze zřídka, zadání tímto způsobem není úplné (posloupnost má nekonečně mnoho členů)

1.2 Grafické znázornění posloupnosti

Definice 1.3 *Grafem posloupnosti* $\{a_n\}$ rozumíme množinu všech bodů v rovině tvaru $(n, a_n), n \in \mathbb{N}$. Graf značíme $G(\{a_n\})$ nebo graf$\{a_n\}$.

Grafem posloupnosti je množina diskrétních bodů v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (se zavedenou kartézskou soustavou souřadnic).

1.3 Vlastnosti posloupností

Definice 1.4 Posloupnost, jejíž všechny členy se navzájem rovnají, se nazývá *konstantní* nebo *stacionární posloupnost*, tj. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a\}_{n=1}^{\infty} = \{a, a, a, a, \ldots\}$, kde $a \in \mathbb{R}$.

Definice 1.5 Posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá $\left| \begin{array}{l} \textit{rostoucí} \\ \textit{klesající} \\ \textit{nerostoucí} \\ \textit{neklesající} \end{array} \right| \begin{array}{c} \text{jestliže pro každé} \\ n \in \mathbb{N} \text{ platí} \end{array} \left| \begin{array}{l} a_n < a_{n+1} \\ a_n > a_{n+1} \\ a_n \geq a_{n+1} \\ a_n \leq a_{n+1} \end{array} \right|.$

Definice 1.6 Rostoucí a klesající posloupnosti se nazývají *ryze monotonní*. Nerostoucí a neklesající posloupnosti se nazývají *monotonní*.

Poznámka: Každá ryze monotonní posloupnost je i monotonní, naopak to ale neplatí.

Definice 1.7 Posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá

- *shora omezená*, jestliže existuje $k \in \mathbb{R}$ takové, že $a_n \leq k \ \forall n \in \mathbb{N}$;
- *zdola omezená*, jestliže existuje $l \in \mathbb{R}$ takové, že $a_n \geq k \ \forall n \in \mathbb{N}$;
- *omezená*, je-li omezená shora i zdola zároveň.

1.4 Algebraické operace s posloupnostmi

Definice 1.8 Říkáme, že *posloupnosti* $\{a_n\}$ *a* $\{b_n\}$ *si jsou rovny*, jestliže $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $a_n = b_n$.

Definice 1.9 Posloupnost
$$\left|\begin{array}{l} \{a_n + b_n\} \\ \{a_n - b_n\} \\ \{a_n \cdot b_n\} \\ \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\},\ b_n \neq 0 \, \forall n \in \mathbb{N} \end{array}\right| \text{ se nazývá } \left|\begin{array}{l} \textit{součtem} \\ \textit{rozdílem} \\ \textit{součinem} \\ \textit{podílem} \end{array}\right| \text{posloupností } \{a_n\} \text{ a } \{b_n\}.$$

Poznámka: Algebraické operace lze rozšířit na konečný počet posloupností.
Poznámka: Speciálně pro $c \in \mathbb{R}$ a posloupnost $\{a_n\}$ máme $c \cdot \{a_n\} = \{c \cdot a_n\}$, $\frac{c}{\{a_n\}} = \left\{\frac{c}{a_n}\right\}$, kde $a_n \neq 0 \, \forall n \in \mathbb{N}$. Dále lze definovat například posloupnost $|\{a_n\}| = \{|a_n|\}$ atp.

Definice 1.10 Posloupnost $\{a_{n_k}\}$ se nazývá *vybraná posloupnost z posloupnosti* $\{a_n\}$, jestliže $\{n_k\}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Stručně říkáme vybraná posloupnost, podposloupnost.

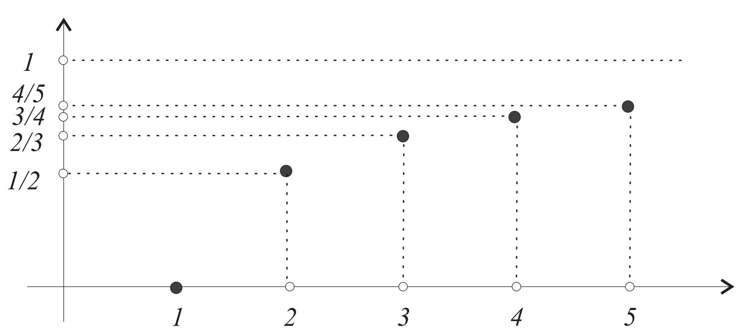
Poznámka: Z posloupnosti jde takto odebrat konečný i nekonečný počet členů, ale vybraná posloupnost (podposloupnost) je opět posloupností, tj. má nekonečný počet členů.

V dalším budeme používat pojem, že nějaké tvrzení platí ne provšechna přirozená n, ale pouze *pro skoro všechna* $n \in \mathbb{N}$.

Definice 1.11 Říkáme, že *skoro všechny členy posloupnosti* $\{a_n\}$ *mají vlastnost* V, jestliže existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna přirozená $n \geq n_0$ mají členy posloupnosti $\{a_n\}$ vlastnost V. (Jinými slovy, jestliže vlastnost V mají všechny členy posloupnosti $\{a_n\}$ s vyjímkou nejvýše jejich konečného počtu.)

2 Limita posloupnosti

Při výpočtu limity posloupnosti zjišťujeme, co se děje s prvky posloupnosti, když index n roste nade všechny meze ("blíží se nekonečnu"). Například pro posloupnost $\{a_n\} = \{1 - \frac{1}{n}\}$ se pro rostoucí n členy "blíží" 1:



Definice 2.1 (Vlastní limita posloupnosti) Říkáme, že *posloupnost* $\{a_n\}$ *má vlastní limitu* $a \in \mathbb{R}$, jestliže ke každému $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ platí $|a_n - a| < \varepsilon$, tj. jestliže

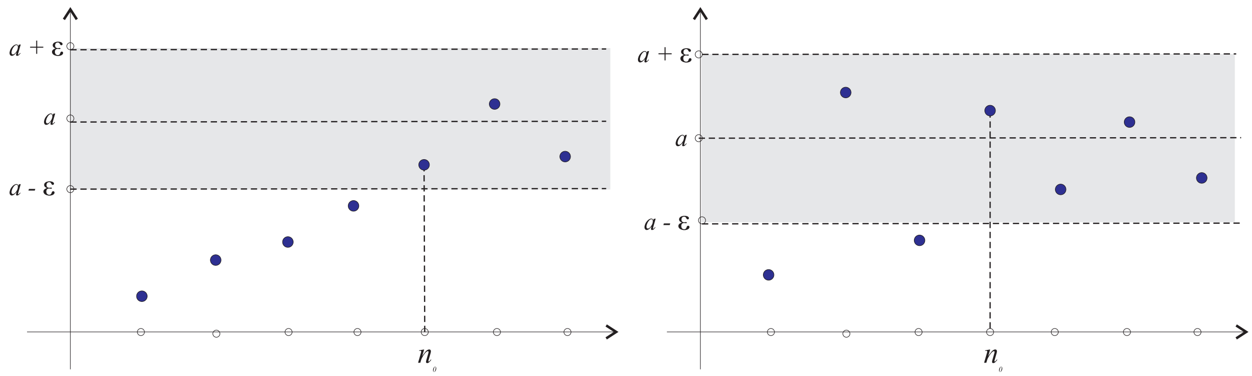
$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon\, \forall n \geq n_0.$$

Symbolicky píšeme

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a$$

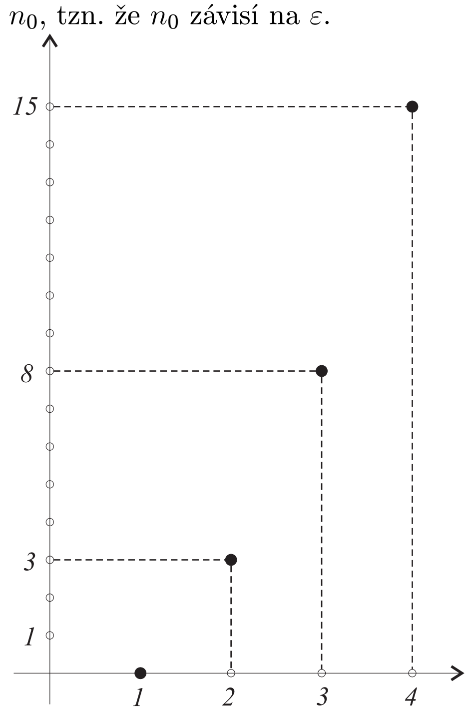
nebo $\{a_n\} \to a$ nebo $a_n \to a$. Číslo a se nazývá *limita posloupnosti* $\{a_n\}$.

Poznámka: lim je zkratkou slova *limes* (lat.) = mez. Zápis $n \to \infty$ čteme n roste nade všechny meze.
Poznámka: Nerovnost $|a_n - a| < \varepsilon$ lze také psát ve tvaru $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$. Graficky to znamená, že od určitého indexu (n_0) už leží všechny členy posloupnosti v ε-pásu kolem limity a.



Poznámka: Číslo $\varepsilon > 0$ volíme a k němu hledáme číslo n_0, tzn. že n_0 závisí na ε.

Uvažujme nyní posloupnost $\{n^2 - 1\}$ a sledujme, co se děje s jejími členy když $n \to \infty$. Z nakresleného grafu vidíme, že pro $n \to \infty$ rostou členy a_n také nade všechny meze. Vlastní limita tedy neexistuje, ale lze zavést další pojem, tzv. *nevlastní limitu posloupnosti.*



Definice 2.2 (Nevlastní limita posloupnosti) Uvažujme posloupnost $\{a_n\}$. Potom říkáme, že

- *posloupnost* $\{a_n\}$ *má nevlastní limitu* ∞, jestliže ke každému reálnému číslu k existuje index $n_0 \in \mathbb{N}$ takový, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $a_n > k$, tj. jestliže

$$\forall k \in \mathbb{R}\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_0 : a_n > k.$$

- *posloupnost* $\{a_n\}$ *má nevlastní limitu* $-\infty$, jestliže ke každému reálnému číslu l existuje index $n_0 \in \mathbb{N}$ takový, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $a_n < l$, tj. jestliže

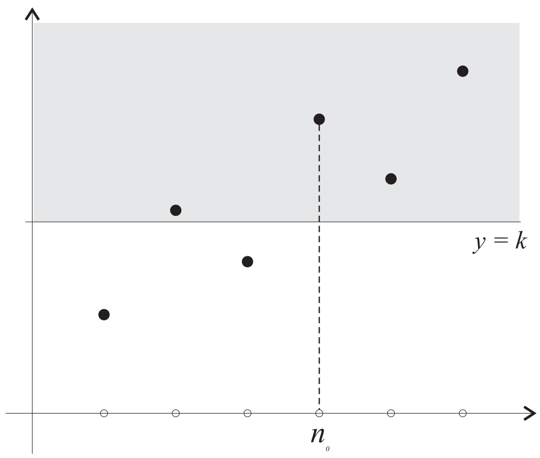
$$\forall l \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 \ :\ a_n < l.$$

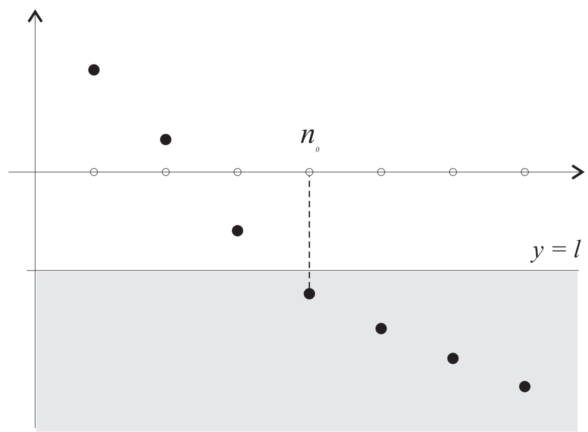
Zapisujeme

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty, \quad \text{resp.} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

Poznámka:

- Je-li $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, potom skoro všechny členy posloupnosti $\{a_n\}$ leží v $\mathcal{U}(\infty, k)$, tj. skoro všechny body grafu posloupnosti $\{a_n\}$ leží nad přímkou $y = k$.
- Je-li $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, potom skoro všechny členy posloupnosti $\{a_n\}$ leží v $\mathcal{U}(-\infty, l)$, tj. skoro všechny body grafu posloupnosti $\{a_n\}$ leží pod přímkou $y = l$.





Poznámka: Číslo k, resp. číslo l, volíme a k němu hledáme n_0, tj. n_0 závisí na k, resp. na l.

Definice 2.3 Posloupnost se nazývá *konvergentní*, má-li vlastní limitu. Posloupnost, která není konvergentní, se nazývá *divergentní*. Tzn. jestliže

- $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, pak říkáme, že $\{a_n\}$ *konverguje k číslu* a;
- $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ nebo $-\infty$, pak říkáme, že $\{a_n\}$ *konverguje k* ∞ *nebo* $-\infty$;
- $\lim_{n\to\infty} a_n$ neexistuje, pak říkáme, že $\{a_n\}$ *osciluje*.

Příklady: Posloupnost $\{\frac{1}{n}\}$ konverguje k nule; posloupnost $\{2n + 3\}$ diverguje k ∞; posloupnost $\{(-2)^n\}$ osciluje.

Definice 2.4 Posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá *nulová*, jestliže konverguje k nule.

Poznámka: Pro zkrácení zápisu můžeme psát pouze $\lim a_n$ namísto $\lim_{n\to\infty} a_n$, protože v případě posloupností (na rozdíl od funkcí!) počítáme vždy limitu pro $n \to \infty$.

2.1 Vlastnosti limit posloupností

Věta 1 *Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

Důkaz: Důkaz provedem sporem, tj. budeme předpokládat, že posloupnost $\{a_n\}$ má dvě limity a a b, a nechť $a < b$. Z definice limity dostaneme

$$\lim a_n = a \iff \forall \varepsilon > 0\, \exists n_1 \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_1 \ :\ |a_n - a| < \varepsilon \tag{1}$$

$$\lim a_n = b \iff \forall \varepsilon > 0\, \exists n_2 \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_2 \ :\ |a_n - b| < \varepsilon \tag{2}$$

Položíme-li $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, potom nerovnosti (1) a (2) platí zároveň a to pro všechna $n \geq n_0$. Zvolíme-li $\varepsilon = \frac{b-a}{2} (> 0)$, potom $\forall n \geq n_0$ postupně dostaneme

$$\begin{array}{rcl} (a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon) & \wedge & (b - \varepsilon < a_n < b + \varepsilon) \\ b - \varepsilon < & a_n & a + \varepsilon \\ b - \varepsilon & < & a + \varepsilon \\ \dfrac{b-a}{2} & < & \varepsilon \end{array}$$

Poslední nerovnost je ve sporu s definicí ε. $\square$

Věta 2 *Jestliže $a_n = a \in \mathbb{R}$ pro s.v. $n \in \mathbb{N}$, potom $\lim a_n = a$.*

Věta 3 *Jestliže pro posloupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ platí, že $a_n = b_n$ pro s.v. $n \in \mathbb{N}$, potom platí ekvivalence*

$$\lim a_n \quad \text{existuje} \quad \Longleftrightarrow \quad \lim b_n \quad \text{existuje.}$$

Navíc platí $\lim a_n = \lim b_n$.

Věta 4 *Jestliže $\lim a_n = a \in \mathbb{R}^*$, potom každá z ní vybraná podposloupnost $\{a_{n_k}\}$ má také limitu a platí $\lim a_{n_k} = a$*

Poznámka: Tuto větu lze užít při výpočtu limity nebo při důkazu neexistence limity:

- Víme-li, že existuje $\lim a_n$, potom existuje také $\lim a_{n_k}$, kde $\{a_{n_k}\}$ je vybraná z $\{a_n\}$ a navíc $\lim a_{n_k} = \lim a_n$.
- Když chceme ukázat, že $\lim a_n$ neexistuje, tak stačí najít dvě z ní vybrané podposloupnosti, jejichž limity jsou různé.
- Naopak to ale neplatí, tj. najdeme-li dvě vybrané podposloupnosti se stejnou limitou, neznamená to ještě, že původní posloupnost limitu má!

Věta 5 *Je-li posloupnost $\{a_n\}$ konvergentní a jestliže nějaká z ní vybraná podposloupnost má limitu $a \in \mathbb{R}$, potom platí $\lim a_n = a$.*

Věta 6 *Každá konvergentní posloupnost je omezená.*

Důkaz: Nechť má posloupnost $\{a_n\}$ limitu a. Z definice limity potom máme

$$\lim a_n = a \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n \geq n_1 \, : \, |a_n - a| < \varepsilon,$$

tzn. že od určitého indexu n_0 platí $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$.

Ostatní členy posloupnosti tvoří konečnou množinu $\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_0-1}\}$, takže lze nalézt její nejmenší a největší prvek. Položme tedy $k = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_0-1}\}$ a $l = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_0-1}\}$. Položíme-li $M = \max\{k, a + \varepsilon\}$ a $m = \min\{l, a - \varepsilon\}$, dostáváme nerovnost

$$m \leq a_n \leq M \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

tj. posloupnost $\{a_n\}$ je omezená. $\square$

Poznámka: Obrácená věta neplatí, tj. existuje omezená posloupnost, která je omezená, ale není konvergentní. Například posloupnost $\{(-1)^n\}$ je omezená čísly -1 a 1, ale není konveregentní. Lze ale dokázat následující větu:

Věta 7 *Je-li posloupnost monotonní a omezená, pak je konvergentní.*

Věta 8 *Pro každou posloupnost $\{a_n\}$ platí ekvivalence*

$$\lim a_n = 0 \iff \lim |a_n| = 0.$$

Věta 9 *jestliže $\lim a_n = 0$ a posloupnost $\{b_n\}$ je omezená, potom platí $\lim(a_n \cdot b_n) = 0$.*

Poznámka: Výše uvedená věta se používá pri praktických výpočtech limit.

Věta 10 *Nechť $\lim a_n = a \in \mathbb{R}^*$ a $\lim b_n = b \in \mathbb{R}^*$. Potom*

$$\begin{aligned}
\lim(a_n \pm b_n) &= \lim a_n \pm \lim b_n \\
\lim(a_n \cdot b_n) &= \lim a_n \cdot \lim b_n \\
\lim \frac{a_n}{b_n} &= \frac{\lim a_n}{\lim b_n} \quad (\text{je} - \text{li navíc} \lim b_n \neq 0) \\
\lim |a_n| &= |\lim a_n| \\
\lim(a_n)^m &= (\lim a_n)^m, \quad m \in \mathbb{N} \\
\lim \sqrt[m]{a_n} &= \sqrt[m]{\lim a_n}, \quad (\text{pokud}\, a_n \geq 0\, \text{pro s.v}\, n \in \mathbb{N})
\end{aligned}$$

pokud mají výrazy na pravé straně smysl.

Poznámka:

- Tvrzení pro součet a součin lze zobecnit na konečný počet sčítanců, resp. činitelů.
- Tato věta se opět používá při praktických výpočtech limit.
- Dodatek "pokud mají výrazy na pravé straně smysl" je důležitý, protože občas dostáváme tzv. *neurčité výrazy* (viz dříve) a v takových případech větu nelze použít!

Věta 11 *Jestliže*

- $a_n > 0$ *pro s.v.* $n \in \mathbb{N}$, *potom* $\quad \lim a_n = 0 \Leftrightarrow \lim \frac{1}{a_n} = \infty.$
- $a_n < 0$ *pro s.v.* $n \in \mathbb{N}$, *potom* $\quad \lim a_n = 0 \Leftrightarrow \lim \frac{1}{a_n} = -\infty.$

Věta 12 *Platí ekvivalence* $\quad \lim |a_n| = \infty \Leftrightarrow \lim \frac{1}{a_n} = 0.$

Poznámka: Výraz "$\frac{konst.}{0}$" není neurčitý výraz, výsledkem je $+\infty$ nebo $-\infty$, záleží na znaméncích čitatele a jmenovatele. Speciálně je zahrnut i případ "$\frac{\infty}{0}$" (což je $\infty \cdot \frac{1}{0} = \infty \cdot (\pm\infty)$).

Podobně výraz "$\frac{konst.}{\infty}$", resp. "$\frac{konst.}{-\infty}$", není neurčitý výraz, je roven 0. Speciálně je zahrnut i případ "$\frac{0}{\pm\infty}$" (což je $0 \cdot \frac{1}{\pm\infty} = 0 \cdot 0 = 0$).

2.2 Limitní přechod za znamením nerovnosti

Věta 13 *Nechť $\lim a_n < \lim b_n$. Potom platí $a_n < b_n$ pro s.v. $n \in \mathbb{N}$.*

Důsledek: Jestliže $\lim a_n > 0$, pak $a_n > 0$ pro s.v. $n \in \mathbb{N}$.

Věta 14 *Nechť $\lim a_n = a \in \mathbb{R}^*$ a $\lim b_n = b \in \mathbb{R}^*$ a nehť dále platí $a_n \leq b_n$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$. Potom $a \leq b$ (tj. $\lim a_n \leq b_n$).*

Důsledek: Je-li $a_n \leq 0$ pro s.v. $n \in \mathbb{N}$, potom $\lim a_n \leq 0$. Je-li $a_n \geq 0$ pro s.v. $n \in \mathbb{N}$, potom $\lim a_n \geq 0$. Tzn. že limita zachovává znamení nerovnosti.

Poznámka: Pokud uvažujeme ostrou nerovnost $a_n < b_n$, potom ale limita nemusí zachovat tutuo ostrou nerovnot, tj. obecně dostaneme $\lim a_n \leq \lim b_n$. Obecně tedy platí, že při limitování se ostrá nerovnost mění na ostrou.

Věta 15 (O limitě tří posloupností) *Nechť pro posloupnosti* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *a* $\{c_n\}$ *platí*

- $a_n \leq c_n \leq b_n$ *pro s.v.* $n \in \mathbb{N}$,
- *existují limity* $\lim a_n$ *a* $\lim b_n$,
- $\lim a_n = \lim b_n$.

Potom existuje i limita $\lim c_n$ *a platí* $\lim a_n = \lim c_n = \lim b_n$.

Důkaz: Nechť jsou splněny předpoklady věty a nechť $\lim a_n = \lim b_n = a \in \mathbb{R}$. Z definice potom platí

$$\lim a_n = a \iff \forall \varepsilon > 0\, \exists n_1 \in \mathbb{N} : n \geq n_1 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon \tag{3}$$
$$\lim b_n = a \iff \forall \varepsilon > 0\, \exists n_2 \in \mathbb{N} : n \geq n_2 \Rightarrow |b_n - a| < \varepsilon \tag{4}$$

Dále víme, že $a_n \leq c_n \leq b_n$ pro s.v. $n \in \mathbb{N}$, tj. že

$$\exists n_3 \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_3 : a_n \leq c_n \leq b_n \tag{5}$$

Položíme-li $n_0 = \max\{n_1 0 n_2, n_3\}$, potom nerovnosti (3), (4) a (5) platí současně pro všechna $n \geq n_0$. Z podmínky (3) máme nerovnost $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ a z podmínky (4) nerovnost $a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon$. Použitím těchto nerovností v nerovnosti (5) dostaneme $a - \varepsilon\{a_n\}_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon$, tj. $|c_n - a| < \varepsilon\; \forall n \geq n_0$, neboli $\lim c_n = a$. □

Pro teorii je důležitý také pojem tzv. *Cauchyovské posloupnosti.*

Definice 2.5 Posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá *Cauchyovská*, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall m, n \geq n_0 : |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

Věta 16 (Cauchy-Bolzanova nutná a postačující podmínka konvergence posloupnosti) *Posloupnost je konvergentní, právě tehdy, když je cauchyovská.*

Poznámka: Důkaz implikace "⇒" plyne přímo z definic obou pojmů. V důkaze obrácené implikace se využívá vlastností lim sup a lim inf.

2.3 Výpočet limit posloupností

Při výpočtech limit používáme věty o limitách a také znalost limit některých význačných posloupností:

$$\lim \frac{1}{n} = 0 \qquad \lim \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim a^n = \begin{cases} 0 & \text{pro } |a| < 1 \\ 1 & \text{pro } a = 1 \\ \infty & \text{pro } a > 1 \\ \text{neex.} & \text{pro } a \leq -1 \end{cases}$$

$$\lim n^k = \begin{cases} \infty & \text{pro } k > 0 \\ 1 & \text{pro } k = 0 \\ 0 & \text{pro } k < 0 \end{cases}$$

$$\lim \sqrt[n]{a} = \begin{cases} 0 & \text{pro } a = 0 \\ 1 & \text{pro } a > 0 \end{cases}$$

$$\lim \frac{a^n}{n^k} = \begin{cases} 0 & \text{pro } 0 \leq a \leq 1 \\ \infty & \text{pro } a > 1; \quad k \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e$$

2.4 Příklady

1. $\lim \dfrac{3n^3-5n+1}{2n^3+n-2}$

"Dosazením $n=\infty$" dostaneme typ limity $\frac{\infty}{\infty}$, tj. neurčitý výraz. Tím pádem nemůžeme použít větu o limitě podílu. Výraz v limitě musíme proto nějak upravit - vytkneme nejvyšší mocninu n z čitatele i jmenovatele.

$$\lim \frac{3n^3-5n+1}{2n^3+n-2} = \lim \frac{n^3(3-\frac{5}{n^2}+\frac{1}{n^3})}{n^3(2+\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n^3})} = \lim \frac{3-\frac{5}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{2+\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n^3}} = (\text{věta}) = \frac{3}{2}$$

2. $\lim \dfrac{n^2-n+2}{-2n^3+2} = \left(\dfrac{\infty}{-\infty}\right) = \lim \dfrac{n^2(1-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2})}{n^3(-2+\frac{2}{n^3})} = \lim \dfrac{1-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{n(-2+\frac{2}{n^3})} = -\dfrac{1}{2}\lim \dfrac{1}{n} = 0$

3. $\lim \dfrac{3n^3+n-1}{2n^2+3n-2} = \left(\dfrac{\infty}{-\infty}\right) = \lim \dfrac{n^3(3+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3})}{n^2(2+\frac{3}{n^n}-\frac{2}{n^2})} = \lim \dfrac{n(3+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3})}{(2+\frac{3}{n^n}-\frac{2}{n^2})} = \dfrac{3}{2}\lim n = \infty$

4. $\lim(5n^2-n+3) = (\infty-\infty) = \lim n^2\left(5-\dfrac{1}{n}+\dfrac{3}{n^2}\right) = \infty$

5. $\lim \dfrac{\cos n}{n} = \left(\dfrac{neex.}{\infty}\right) = \lim \cos n \cdot \dfrac{1}{n} = (omezená \cdot 0) = 0$

6. $\lim \dfrac{2n+\sin n}{n+1} = \left(\dfrac{\infty + neex.}{\infty}\right)$

Použijeme větu o limitě tří posloupností:

$$-1 \le \sin n \le 1 \quad \forall n \qquad / + 2n$$

$$2n-1 \le 2n+\sin n \le 1+2n \qquad / : (n+1) > 0$$

$$\frac{2n-1}{n+1} \le \frac{2n+\sin n}{n+1} \le \frac{1+2n}{n+1}$$

Protože

$$\lim \frac{2n-1}{n+1} = \lim \frac{n\left(2-\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim \frac{2-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 2 \quad \text{a} \quad \lim \frac{1+2n}{n+1} = \lim \frac{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 2,$$

pak $\quad \lim \dfrac{2n+\sin n}{n+1} = 2$

Jiný způsob - použijeme větu o limitě součtu:

$$\lim \frac{2n+\sin n}{n+1} = \lim \frac{2n}{n+1} + \lim \frac{\sin n}{n+1} = \lim \frac{2}{1+\frac{1}{n}} + \lim \sin n \frac{1}{n+1} = 2 + (omezená \cdot 0) = 2+0 = 2$$