VI. Nevlastní integrály

Obsah

Nevlastní integrály funkce jedné proměnné jsou zobecněním Riemannova integrálu. V případě Riemannova integrálu požadujeme, aby funkce i interval, na kterém integrujeme, byly omezené. V praxi však často potřebujeme počítat i takové integrály, kde buď funkce nebo interval nejsou omezené.

Před definicí nevlastních integrálů potřebujeme zavést ještě jeden pojem a to *integrál jako funkce horní/dolní meze.*

1 Integrál jako funkce horní meze

Předpokládejme, že funkce $f \in \mathcal{R}(< a, b >)$. Z aditivity integrálu plyne, že pro všechna $x \in < a, b >$ existuje integrál

$$\int_a^x f(t)\, dt$$

Tento určitý integrál je číslo, které závisí na volbě x, což znamená, že integrál $\int_a^x f(t)dt$ je funkcí x, tj. *funkcí horní meze.* Lze tedy definovat funkci

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt \quad \forall x \in < a, b > .$$

Definice 1.1 Nechť funkce f je integrovatelná na intervalu $< a, b >$. Potom se funkce $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ definovaná pro všechna $x \in < a, b >$ nazývá *funkce horní meze integrálu funkce* f nebo také říkáme, že integrál $\int_a^x f(t)\, dt$ je *funkcí horní meze.*

Poznámka: Analogicky lze definovat funkci $G(x) = \int_x^b f(t)\, dt$ pro $x \in < a, b >$, tzn. považovat interál $\int_x^b f(t)\, dt$ za *funkci dolní meze.*

Věta 1.1 *Je-li funkce f integrovatelná a nezáporná na intervalu $< a, b >$, potom je funkce F neklesající na $< a, b >$.*

Věta 1.2 (Vlastnosti inegrálu jako funkce horní meze) *Nechť je funkce f integrovatelná na intervalu $< a, b >$. Potom pro funkci $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ platí:*

1. *Funkce F je spojitá na $< a, b >$.*

2. *V každém bodě $x_0 \in < a, b >$, v němže je funkce f spojitá, má funkce F (vlastní) derivaci a platí*

$$F'(x_0) = f(x_0) \text{ neboli } \frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\, dt\right]_{x=x_0} = f(x_0)$$

   (v krajních bodech intervalu uvažujeme příslušné jednostranné derivace).

3. *Je-li funkce f spojitá na $< a, b >$, pak funkce F je primitivní k funkci f na $< a, b >$.*

2 Nevlastní integrály

Nevlastní integrály definujeme jako limity určitých integrálů s proměnnou mezí (horní nebo dolní). Existuje-li příslušná vlastní limita, říkáme, že *nevlastní integrál konverguje* (*existuje*), v opačném případě říkáme, že *diverguje.*

O nevlastních integrálech tedy hovoříme v následujících případech:

- Je-li (a, b) neomezený, tj. alespoň jeden krajní bod tohoto intervalu je nevlastní číslo.
- Je-li funkce f na (a, b) neomezená.

Definice 2.1 Řekneme, že bod $c \in \mathbb{R}^*$, kde $a \leq c \leq b$, je *singulárním bodem integrace funkce f na intervalu* (a, b), je-li buď $c = \infty$ nebo $c = -\infty$ nebo je-li funkce f na každém okolí bodu c neomezená.

Poznámka: Dále budeme předpokládat, že singulárních bodů je konečný počet a že funkce f je na každém uzavřeném intervalu neobsahujícím singulární bod integrovatelná.

Rozlišujeme dva základní typy nevlastních integrálů: nevlastní integrály vlivem meze a nevlastní integrály vlivem funkce.

2.1 Nevlastní integrály vlivem meze

Definice 2.2 Nechť je funkce f definovaná na $< a, \infty)$ a nechť $\forall t \in (a, \infty)$ existuje integrál $\int_a^t f(x)dx$. Jestliže existuje vlastní limita

$$\lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx, \qquad (1)$$

pak říkáme, že *nevlastní integrál* $\int_a^\infty f(x)dx$ *konverguje (existuje)*. Existuje-li nevlastní integrál, pak ho definujeme vztahem

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx.$$

Je-li limita (1) nevlastní nebo neexistuje, říkáme, že *nevlastní integrál diverguje.*

Definice 2.3 Nechť je funkce f definovaná na $(-\infty, b >$ a nechť $\forall t \in (-\infty, b)$ existuje integrál $\int_t^b f(x)dx$. Jestliže existuje vlastní limita

$$\lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)dx, \qquad (2)$$

pak říkáme, že *nevlastní integrál* $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ *konverguje (existuje)*. Existuje-li nevlastní integrál, pak ho definujeme vztahem

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)dx.$$

Je-li limita (2) nevlastní nebo neexistuje, říkáme, že *nevlastní integrál diverguje.*

Definice 2.4 Nechť je funkce f definovaná na $(-\infty, \infty)$ a nechť konvergují nevlastní integrály

$$\int_{-\infty}^c f(x)dx \qquad (3) \qquad \text{a} \qquad \int_c^\infty f(x)dx \qquad (4),$$

kde $c \in \mathbb{R}$. Pak říkáme, že *nevlastní integrál* $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ *konverguje (existuje)* a definujeme ho vztahem

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Diverguje-li aspoň jeden z integrálů (3) a (4), pak říkáme, že *nevlastní integrál* $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ *diverguje.*

2.2 Nevlastní integrály vlivem funkce

Definice 2.5 Nechť je funkce f definovaná na omezeném intervalu $< a, b)$ a není omezená na žádném levém okolí bodu b, přičemž pro každé $t \in< a, b)$ existuje integrál $\int_a^t f(x)dx$. Jestliže existuje vlastní limita

$$\lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)dx, \qquad (5)$$

pak říkáme, že *nevlastní integrál* $\int_a^b f(x)dx$ *konverguje (existuje)*. Existuje-li nevlastní integrál, pak ho definujeme vztahem

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)dx.$$

Je-li limita (5) nevlastní nebo neexistuje, říkáme, že *nevlastní integrál diverguje.*

Definice 2.6 Nechť je funkce f definovaná na omezeném intervalu $(a, b >$, není omezená na žádném pravém okolí bodu a a nechť pro každé $t \in (a, b >$ existuje integrál $\int_t^b f(x)dx$. Jestliže existuje vlastní limita

$$\lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)dx, \qquad (6)$$

pak říkáme, že *nevlastní integrál* $\int_a^b f(x)dx$ *konverguje (existuje)*. Existuje-li nevlastní integrál, pak ho definujeme vztahem

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)dx.$$

Je-li limita (5) nevlastní nebo neexistuje, říkáme, že *nevlastní integrál diverguje.*

Definice 2.7 Nechť je funkce f definovaná na omezeném intervalu $< a, b >$, není omezená na žádném okolí bodu $c \in (a, b)$ a nechť konvergují nevlastní integrály

$$\int_a^c f(x)dx \qquad (7) \qquad \text{a} \qquad \int_c^b f(x)dx \qquad (8).$$

Pak říkáme, že *nevlastní integrál* $\int_a^b f(x)dx$ *konverguje (existuje)* a definujeme ho vztahem

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Diverguje-li alespoň jeden z integrálů (7) a (8), pak říkáme, že *nevlastní integrál* $\int_a^b f(x)dx$ *diverguje.*

2.3 Výpočet neurčitých integrálů

Jestliže známe primitivní funkci F k funkci f na uzavřeném intervalu neobsahujícím singulární body integrace, můžeme nevlastní integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ počítat pomocí modifikovaného Leibniz-Newtonova vzorce.

2.3.1 Nevlastní integrály vlivem meze

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\left(\int_a^t f(x)\,dx\right) = \lim_{t\to\infty}\left([F(x)]_a^t\right) = \lim_{t\to\infty}\big(F(t)-F(a)\big) = \lim_{t\to\infty}F(t)-F(a)$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\left(\int_t^b f(x)\,dx\right) = \lim_{t\to-\infty}\left([F(x)]_t^b\right) = \lim_{t\to-\infty}\big(F(b)-F(t)\big) = F(b)-\lim_{t\to-\infty}F(t)$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^t f(x)\,dx + \lim_{u\to\infty}\int_c^u f(x)\,dx =$$
$$= \Big(F(c) - \lim_{t\to-\infty}F(t)\Big) + \Big(\lim_{u\to\infty}F(u)-F(c)\Big) = \lim_{u\to\infty}F(u) - \lim_{t\to-\infty}F(t)$$

2.3.2 Nevlastní integrály vlivem funkce

Nechť f není omezená na žádném okolí bodu b:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-}\left([F(x)]_a^t\right) = \lim_{t\to b^-}\big(F(t)-F(a)\big) = \lim_{t\to b^-}F(t)-F(a)$$

Nechť f není omezená na žádném okolí bodu a:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+}\left([F(x)]_t^b\right) = \lim_{t\to a^+}\big(F(b)-F(t)\big) = F(b)-\lim_{t\to a^+}F(t)$$

Nechť f není omezená na žádném okolí bodu $c \in (a, b)$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \lim_{t\to c^-}\int_a^t f(x)\,dx + \lim_{u\to c^+}\int_u^b f(x)\,dx =$$
$$= \Big(\lim_{t\to c^-}F(t)-F(a)\Big) + \Big(F(b)-\lim_{u\to c^+}F(u)\Big) = F(b) + \lim_{t\to c^-}F(t) - \lim_{u\to c^+}F(u) - F(a)$$

2.4 Zobecnění

Uvažujme funkci f a interval (a, b) s více singulárními body integrace. Rozdělme interval (a, b) pomocí bodů $a = c_0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_{n-1} < c_n = b$ tak, aby každý z integrálů

$$(*) \qquad \int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)\,dx \qquad \forall i = 1, \dots n$$

obsahoval jen jeden singulární bod integrace.

Potom říkáme, že nevlastní integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ konverguje, jestliže konvergují všechny integrály $(*)$. V tomto případě pak definujeme

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)\,dx$$

Jestliže alespoň jeden z integrálů $(*)$ diverguje, pak říkáme, že nevlastní integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ diverguje.

2.5 Geometrická interpretace nevlastních integrálů

Je-li funkce f nezáporná na intervalu (a, b), můžeme nevlastní integrál (pokud konverguje) chápat jako obsah příslušného neomezeného rovinného obrazce M, kde

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in (a, b), 0 \le y \le f(x)\}.$$

2.6 Poznámky

Konvergentní nevlastní integrály mají stejné základní vlastnosti jako vlastní integrály, tj. platí pro ně např. věta o linearitě, monotonii nebo aditivitě.

Existuje celá řada kritérií konvergence nevlastních integrálů, tj. podmínek, za kterých nevlastní integrály konvergují (viz např. Rektorys: Přehled užité matematiky).