

Neurčitý a určitý integrál funkce

1. Příklad Vypočtete metodou per partes:

- | | |
|---|---|
| a) $\int x^2 \cos x \, dx;$ | <i>Výsledek:</i> $(x^2 - 2) \sin x + 2x \cos x.$ |
| b) $\int (x^2 + 2x + 17)e^x \, dx;$ | <i>Výsledek:</i> $(x^2 + 17)e^x;$ |
| c) $\int x^2 \arctg x \, dx;$ | <i>Výsledek:</i> $\frac{x^3}{3} \arctg x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}\ln(x^2 + 1).$ |
| d) $\int \ln x \, dx;$ | <i>Výsledek:</i> $x(\ln x - 1).$ |
| e) $\int \sin^2 x \, dx;$ | <i>Výsledek:</i> $\frac{1}{2}(x - \sin x \cos x).$ |
| f) $\int \frac{\ln x}{x^2} \, dx;$ | <i>Výsledek:</i> $-\frac{1}{x}(\ln x + 1).$ |
| g) $\int \frac{x}{\sin^2 x} \, dx;$ | <i>Výsledek:</i> $-x \cotg x + \ln \sin x .$ |
| h) $\int x \ln x \, dx;$ | <i>Výsledek:</i> $\frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4}.$ |
| i) $\int e^x \cos x \, dx;$ | <i>Výsledek:</i> $\frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x).$ |
| j) $\int \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}} \, dx;$ | <i>Výsledek:</i> $\sqrt{x}(2\ln^2 x - 8\ln x + 16).$ |
| k) $\int \arcsin x \, dx;$ | <i>Výsledek:</i> $x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}.$ |
| l) $\int \frac{\ln^2 x}{x^2} \, dx;$ | <i>Výsledek:</i> $-\frac{1}{x}(\ln^2 x + 2\ln x + 2).$ |
| m) $\int x^2 \sin(2x) \, dx;$ | <i>Výsledek:</i> $-\frac{x^2}{2} \cos(2x) + \frac{x}{2} \sin(2x) + \frac{1}{4} \cos(2x).$ |
| n) $\int x e^{-x} \, dx;$ | <i>Výsledek:</i> $e^{-x}(-x - 1).$ |
| o) $\int x^3 \cos x \, dx;$ | <i>Výsledek:</i> $(x^3 - 6x) \sin x + (3x^2 - 6) \cos x.$ |
| p) $\int \arctg x \, dx;$ | <i>Výsledek:</i> $x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1).$ |
| q) $\int \cos(\ln x) \, dx;$ | <i>Výsledek:</i> $\frac{x}{2}(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)).$ |
| r) $\int \sqrt{x^2 + 1} \, dx;$ | <i>Výsledek:</i> $\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2 + 1} + \ln x + \sqrt{x^2 + 1}).$ |

2. Příklad Vhodnou substitucí vypočtete následující triviální integrály:

- | | |
|--|--|
| a) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} \, dx;$ | <i>Výsledek:</i> $\frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x$, (substitute: $\operatorname{tg} x = t$). |
| b) $\int \frac{1}{x \ln x} \, dx;$ | <i>Výsledek:</i> $\ln \ln x $, (substitute: $\ln x = t$). |
| c) $\int \frac{\sqrt[3]{\arctg x}}{1+x^2} \, dx;$ | <i>Výsledek:</i> $\frac{3}{4} \sqrt[3]{(\arctg x)^4}$, (substitute: $\arctg x = t$). |
| d) $\int \arctg \sqrt{x} \, dx;$ | <i>Výsledek:</i> $x \arctg \sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctg \sqrt{x}$, (substitute: $x = t^2$). |
| e) $\int \frac{1}{\sqrt{4x+9}} \, dx;$ | <i>Výsledek:</i> $\frac{1}{2} \sqrt{4x+9}$, (substitute: $4x+9 = t$). |
| f) $\int \frac{1}{\sin^2(3x-7)} \, dx;$ | <i>Výsledek:</i> $-\frac{1}{3} \cotg(3x-7)$, (substitute: $3x-7 = t$). |
| g) $\int \frac{1}{7x-9} \, dx;$ | <i>Výsledek:</i> $\frac{1}{7} \ln 7x-9 $, (substitute: $7x-9 = t$). |
| h) $\int \frac{dx}{9+4x^2};$ | <i>Výsledek:</i> $\frac{1}{6} \arctg \frac{2x}{3}$, (substitute: $2x = 3t$). |
| i) $\int e^x \cos(e^x) \, dx;$ | <i>Výsledek:</i> $\sin(e^x)$, (substitute: $e^x = t$). |
| j) $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{1+2\cos x}} \, dx;$ | <i>Výsledek:</i> $-\frac{3}{4} \sqrt[3]{(1+2\cos x)^2}$, (substitute: $1+2\cos x = t$). |
| k) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \, dx;$ | <i>Výsledek:</i> $-e^{\frac{1}{x}}$, (substitute: $\frac{1}{x} = t$). |
| l) $\int \frac{3^x}{5+3^x} \, dx;$ | <i>Výsledek:</i> $\frac{1}{\ln 3} \ln 5+3^x $, (substitute: $5+3^x = t$). |
| m) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}} \, dx;$ | <i>Výsledek:</i> $\frac{1}{4} \arcsin x^4$, (substitute: $x^4 = t$). |
| n) $\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} \, dx;$ | <i>Výsledek:</i> $\cos \frac{1}{x}$, (substitute: $\frac{1}{x} = t$). |
| o) $\int 2x \sqrt{x^2+1} \, dx;$ | <i>Výsledek:</i> $\frac{2}{3} (x^2+1)^{3/2}$, (substitute: $x^2+1 = t^2$). |
| p) $\int \frac{x+(\arctg x)^{-1}}{1+x^2} \, dx;$ | <i>Výsledek:</i> $\frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \ln \arctg x $, |
| q) $\int \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)} \, dx;$ | <i>Výsledek:</i> $\ln \ln(\ln x) $, |
| r) $\int \sin^7 x \cos x \, dx;$ | <i>Výsledek:</i> $\frac{1}{8} \sin^8 x$, (substitute: $\sin x = t$). |
| s) $\int \frac{2^x dx}{\sqrt{1+4^x}};$ | <i>Výsledek:</i> $\frac{1}{\ln 2} \ln(2^x + \sqrt{1+4^x})$, (substitute: $2^x = t$). |

3. Příklad Vypočtete rychle integrály z funkcí racionálně lomených:

- | | |
|--|--|
| a) $\int \frac{x^4+6x^2+x-2}{x^4-2x^3} \, dx;$ | <i>Výsledek:</i> $x - 3\ln x - \frac{1}{2x^2} + 5\ln x-2 .$ |
| b) $\int \frac{5}{(2x-3)^3} \, dx;$ | <i>Výsledek:</i> $-\frac{5}{4} \frac{1}{(2x-3)^2}.$ |
| c) $\int \frac{27 \, dx}{\sqrt{2x-5}};$ | <i>Výsledek:</i> $\frac{27}{\sqrt{2}} \ln \sqrt{2x-5} .$ |
| d) $\int \frac{8x-31}{x^2-9x+14} \, dx;$ | <i>Výsledek:</i> $3\ln x-2 + 5\ln x-7 .$ |
| e) $\int \frac{x \, dx}{(x-1)(x+1)^2};$ | <i>Výsledek:</i> $\frac{1}{4} \ln x-1 - \frac{1}{4} \ln x+1 - \frac{1}{2(x+1)}.$ |

- f) $\int \frac{11x^2-2x-33}{x^2-3} dx$; Výsledek: $-\ln|x-\sqrt{3}| - \ln|x+\sqrt{3}| + 11x$.
g) $\int \frac{4x^2+4x-11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)} dx$; Výsledek: $\frac{1}{8} \ln \left| \frac{(2x-1)^3(2x-5)^3}{2x+3} \right|$.
h) $\int \frac{4-4x}{4x^2-4x+1} dx$; Výsledek: $-\ln|2x-1| + \frac{1}{2x-1}$.
i) $\int \frac{6x+6}{2x^2+3x} dx$; Výsledek: $\ln|2x^3+3x^2|$.
j) $\int \frac{3x^4+x^3-5x+2}{x^5-x^4-2x^3} dx$; Výsledek: $\ln|x(x-2)^3(x+1)^2| - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}$.
k) $\int \frac{2+2x+x^2-x^3}{2-x^2} dx$; Výsledek: $\frac{x^2}{2} - x + \sqrt{2} \ln \left| \frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x} \right|$.

4. Příklad Pečlivě zintegrujte:

- a) $\int \sin^5 x dx$; Výsledek: $-\cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{1}{5} \cos^5 x$, (subs.: $\cos x = t$).
b) $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^4 x} dx$; Výsledek: $-\frac{1}{3 \sin^3 x} + \frac{2}{\sin x} + \sin x$, (substitute: $\sin x = t$).
c) $\int \frac{dx}{4 \sin x - 7 \cos x - 7}$; Výsledek: $\frac{1}{4} \ln |4 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 7|$, (substitute: $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$).
d) $\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x} dx$; Výsledek: $\cos x - 2 \operatorname{arctg}(\cos x)$, (substitute: $\cos x = t$).
e) $\int \frac{dx}{\sin x \cos(2x)}$; Výsledek: $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-\cos x}{1+\cos x} \right| + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1+\sqrt{2} \cos x}{-1+\sqrt{2} \cos x} \right|$, (substitute: $\cos x = t$).
f) $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$; Výsledek: $-\frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{3 \operatorname{tg}^3 x}$, (substitute: $\operatorname{tg} x = t$).
g) $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^4 x} dx$; Výsledek: $\operatorname{arctg}(\sin^2 x)$, (substitute: $\sin x = t$).

5. Příklad Zintegrujte následující iracionální funkce:

- a) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}} dx$; Výsledek: $\frac{4}{3}(x^{\frac{3}{4}} - \ln|x^{\frac{3}{4}} + 1|)$, (substitute: $x = t^4$).
b) $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx$; Výsledek: $2(\frac{\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x}{2} + 2\sqrt{x} - 2 \ln|\sqrt{x} + 1|)$, (substitute: $x = t^2$).
c) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$; Výsledek: $\ln \left| \frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1} \right|$, (substitute: $2x+1 = t^2$).
d) $\int x^2 \sqrt[3]{1-x} dx$; Výsledek: $-\frac{3}{10} \sqrt[3]{(1-x)^{10}} + \frac{6}{7} \sqrt[3]{(1-x)^7} - \frac{3}{4} \sqrt[3]{(1-x)^4}$, (substitute: $1-x = t^3$).
e) $\int \frac{2+\sqrt{x}}{x(\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x})} dx$; Výsledek: $4\sqrt[4]{x} - 6\sqrt[6]{x} + 12\sqrt[12]{x} + 24 \ln|\sqrt[12]{x}| - \frac{24}{\sqrt[12]{x}} - \frac{12}{\sqrt[6]{x}} - 36 \ln|\sqrt[12]{x} + 1|$, (substitute: $x = t^{12}$).
f) $\int \frac{1-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} dx$; Výsledek: $2\sqrt{x} - \frac{6}{5} x^{\frac{6}{5}}$, (substitute: $x = t^6$).
g) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}$; Výsledek: $2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4 \ln|\sqrt[4]{x} + 1|$, (substitute: $x = t^4$).
h) $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$; Výsledek: $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, (substitute: $x = \sin t$).
i) $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} dx$; Výsledek: $\sqrt{x^2-4} + 2 \arcsin \frac{2}{x}$, (substitute: $x = \frac{2}{\sin t}$).

6. Příklad Vypočtěte následující určité integrály:

- a) $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx$; Výsledek: $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$, (per partes).
b) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{(1-\sin^2 x) \cos x}{\sin^2 x} dx$; Výsledek: $\frac{1}{2}$, (substitute: $\sin x = t$).
c) $\int_1^2 \frac{x dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$; Výsledek: $-\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$, (substitute: $x^2+1 = t^2$).
d) $\int_1^9 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$; Výsledek: $4 - 2 \ln 2$, (substitute: $x = t^2$).
e) $\int_1^4 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$; Výsledek: $2 \operatorname{arctg} 2 - \frac{\pi}{2}$, (substitute: $x = t^2$).
f) $\int_4^5 \frac{\sqrt{x-4}}{1+\sqrt{x-4}} dx$; Výsledek: $-1 + 2 \ln 2$, (substitute: $x-4 = t^2$).
g) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cos^2 x dx$; Výsledek: $\frac{1}{12}(4 - \sqrt{2})$, (substitute: $\cos x = t$).
h) $\int_3^8 \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1+x}}$; Výsledek: $2 \operatorname{arctg} 3 - 2 \operatorname{arctg} 2$, (substitute: $1+x = t^2$).
i) $\int_2^5 \frac{x-1}{\sqrt{4x-2}} dx$; Výsledek: $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, (substitute: $4x-2 = t^2$).
j) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x+1} dx$; Výsledek: $-1 + \frac{\pi}{2}$, (substitute: $\cos x = t$).
k) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x dx}{e^{2x}-1}$; Výsledek: $\frac{1}{2}(\ln \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{3})$, (substitute: $e^x = t$).
l) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^2 x dx$; Výsledek: $\frac{1}{3} - \frac{1}{5}$, (substitute: $\cos x = t$).