VII. Mocninné řady

Obsah

1 Posloupnosti a řady funkcí **2**

1.1 Základní pojmy 2

1.2 Stejnoměrná konvergence 3

1.3 Vlastnosti stejnoměrně konvergentních posloupností a řad funkcí 4

2 Mocninné řady **5**

2.1 Obor konvergence 5

2.2 Základní vlastnosti 5

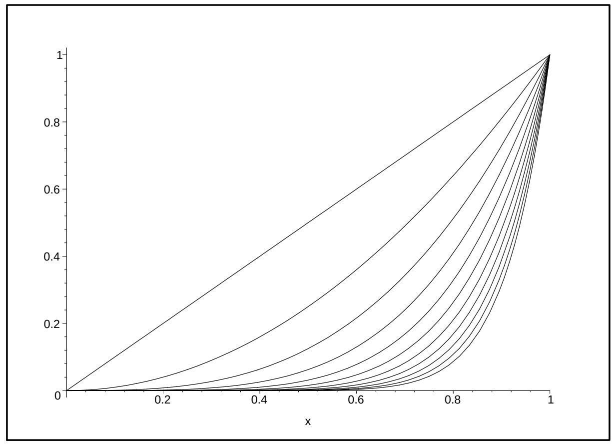
2.3 Rozvoj funkce v mocninnou řadu 6

1 Posloupnosti a řady funkcí

1.1 Základní pojmy

Definice 1.1 Zobrazení množiny $\mathbb{N}$ do množiny všech funkcí definovaných na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ se nazývá *posloupnost funkcí na I* nebo *funkcionální posloupnost na I* a značí se $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$.

Příklad: Uvažujme posloupnost $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ na $I = < 0, 1 >$, kde $f_n(x) = x^n \ \forall n \in \mathbb{N}$, tj. posloupnost $\{x, x^2, x^3, \dots\}$. Grafy těchto funkcí (pro $n = 1, ..11$) jsou znázorněny na obrázku.



Definice 1.2 (Bodová konvergence posloupnosti funkcí)

- Nechť $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí definovaných na I a nechť $x_0 \in I$ je libovolný bod. Jestliže číselná posloupnost $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje, říkáme, že (funkcionální) posloupnost $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje v bodě* x_0.
- Říkáme, že posloupnost $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *bodově konverguje k funkci* $f(x)$ *na intervalu* I, jestliže konverguje ve všech bodech intervalu I, tj. jestliže ke každému $x \in I$ a každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. V tom případě pak píšeme $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ na I nebo $f_n \to f$ na I.

Poznámka: Číslo $n_0 \in \mathbb{N}$ v definici závisí na volbě čísla ε a také na volbě bodu $x \in I$, tj. $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$. I pro stejné ε tak můžeme pro různá x dostat různá n_0.

Definice 1.3

- Nechť $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí definovaných na intervalu I. Symbol

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \dots$$

  nazýváme *nekonečnou řadou funkcí na I* nebo *funkční řadou na I*.

- Posloupnost funkcí $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$\begin{aligned} s_1(x) &= f_1(x) \\ s_2(x) &= f_1(x) + f_2(x) \\ s_3(x) &= f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) \\ &\dots \\ s_n(x) &= f_1(x) + f_2(x) + \cdots f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \\ &\dots \end{aligned}$$

  se nazývá *posloupnost částečných součtů* řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Definice 1.4 (Bodová konvergence řady funkcí)

- Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ je řada funkcí definovaných na I a nechť $x_0 \in I$ je libovolný bod. Jestliže číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ konverguje, říkáme, že (funkcionální) řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *konverguje v bodě* x_0.
- Jestliže posloupnost částečných součtů $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje na I, pak říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *bodově konverguje na* I a funkci $s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$ (definovanou na I) nazýváme *součet řady* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ a píšeme $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = s(x)$ na I.
- (Alternativně: Říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *bodově konverguje k funkci* $s(x)$ *na intervalu* I, jestliže konverguje ve všech bodech intervalu I. V tom případě pak píšeme $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = s(x)$ na I.)

Definice 1.5 (Obor konvergence)

- *Oborem konvergence posloupnosti funkcí* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ nazýváme maximální množinu bodů $\overline{x} \in \mathbb{R}$, v nichž číselná posloupnost $\{f_n(\overline{x})\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje.
- *Oborem konvergence řady funkcí* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ nazýváme maximální množinu bodů $\overline{x} \in \mathbb{R}$, v nichž číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\overline{x})$ konverguje.

1.2 Stejnoměrná konvergence

Jednou z nejdůležitějších otázek týkajících se posloupností a řad funkcí je to, zda se vlastnosti jednotlivých členů posloupnosti nebo řady přenáší také na limitní funkci, resp. součet řady. Není např. problém ověřit, že limita posloupnosti, resp. součet řady, nezáporných/nekladných funkcí je nezáporná/nekladná funkce (ale limita, resp. součet, kladných/záporných funkcí nemusí být kladná/záporná). Analogicky se přenáší vlastnost monotonie (ale ne vlastnost ryzí monotonie). Naopak u některých dalších vlastností, zejména např. spojitosti, je třeba pro přenesení této vlastnosti na limitu, resp. součet, stanovit další podmínky. Ukazuje se, že pojem *bodové konvergence* je na toto přenášení příliš slabý, a proto se uvažuje silnější typ konvergence, tzv. *stejnoměrná konvergence.*

Definice 1.6 (Stejnoměrná konvergence posloupnosti funkcí)
Říkáme, že posloupnost $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje stejnoměrně* k funkci $f(x)$ na intervalu I, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, a všechna $x \in I$ platí $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Píšeme $f_n \rightrightarrows f$ na I.

Geometrický význam stejnoměrné konvergence $f_n \rightrightarrows f$ spočívá v tom, že od určitého indexu n_0 už všechny další členy posloupnosti leží v ε-okolí limitní funkce, tj. že jejich grafy na intervalu I leží mezi grafy funkcí $f(x) - \varepsilon$ a $f(x) + \varepsilon$.

Srovnání bodové a stejnoměrné konvergence posloupnosti funkcí:

* Bodová konvergence $f_n \to f$

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \forall x \in I \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N},\, n \geq n_0 \;:\; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

* Stejnoměrná konvergence $f_n \rightrightarrows f$

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall x \in I \;\; \forall n \in \mathbb{N},\, n \geq n_0 \;:\; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

V symbolickém zápisu se od sebe oba pojmy liší "pouze" v pořadí kvantifikátorů. Z hlediska vlastností obou typů konvergence je tento zdánlivý detail naprosto zásadní. V případě bodové konvergence závisí číslo n_0 na volbě čísla ε a bodu $x \in I$, kdežto u stejnoměrné konvergence n_0 závisí pouze na ε, tj. je univerzální pro všechna $x \in I$. Přímo z definic je zřejmé, že ze stejnoměrné konvergence plyne bodová konvergence; opačná implikace obecně neplatí!

Definice 1.7 (Stejnoměrná konvergence řad funkcí)
Říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *konverguje stejnoměrně* k součtu $s(x)$ na intervalu I, jestliže posloupnost $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ jejích částečných součtů stejnoměrně konverguje k funkci $s(x)$ na I.

Poznámka: Stejnoměrnou konvergenci nevyšetřujeme podle definice, ale používáme tzv. *kritéria stejnoměrné konvergence* - viz literatura.

Jako příklad takového kritéria uvedeme tzv. Weierstrassovo kritérium, které využívá konvergence číselné řady:

Věta 1.1 (Weierstrassovo kriterium stejnoměrné konvergence)
Nechť $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí na I. Nechť existuje posloupnost nezáporných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ taková, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, a nechť pro všechna $x \in I$ a všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $|f_n(x)| \leq a_n$. Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na intervalu I.

1.3 Vlastnosti stejnoměrně konvergentních posloupností a řad funkcí

V této kapitole uvedeme nejdůležitější vlastnosti, které se týkají stejnoměrně konvergentních posloupností a řad funkcí.

Věta 1.2 *Jestliže $f_n \rightrightarrows f$ na I a jestliže jsou všechny funkce $f_n(x)$ na I spojité, pak je na I spojitá také limitní funkce $f(x)$.*

Věta 1.3 *Nechť řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ stejnoměrně konverguje na I a má na I součet $s(x)$. Jsou-li všechny funkce $f_n(x)$ na I spojité, pak je na I spojitá také funkce $s(x)$.*

Věta 1.4 *Nechť řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ stejnoměrně konverguje na intervalu $I =< a, b >$ a má na I součet $s(x)$. Jsou-li všechny funkce $f_n(x)$ na I integrovatelné, pak je na I integrovatelná také funkce $s(x)$ a platí*

$$\int_a^b s(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx\,,\ \text{tj.}\ \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

Věta 1.5 *Nechť $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí, které mají na otevřeném intervalu I derivaci. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje na I a nechť $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ konverguje stejnoměrně na I. Potom má funkce $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ derivaci na I a platí*

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)\,,\ \text{tj.}\ \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

2 Mocninné řady

Definice 2.1 Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel a x_0 libovolné reálné číslo. *Mocninnou řadou se středem v bodě x_0 a koeficienty a_n* nazýváme funkcionální řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots$$

Poznámka: Substitucí $y = x - x_0$ lze mocninnou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ se středem v bodě x_0 převést na mocninnou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y^n$ se středem v počátku. Stačí proto vyšetřovat vlastnosti mocninných řad se středem v počátku.

2.1 Obor konvergence

Definice 2.2 *Oborem konvergence* mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ je množina všech bodů $\bar{x} \in \mathbb{R}$ takových, že číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \bar{x}^n$ konverguje.

Věta 2.1 *Každá mocninná řada konverguje ve svém středu a má součet a_0.*

Věta 2.2 *Ke každé mocninné řadě $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ existuje jediné číslo $r \in <0, \infty>$ takové, že řada absolutně konverguje pro $|x| < r$ a diverguje pro $|x| > r$.*

Definice 2.3 Číslo r z předchozí věty se nazývá *poloměr konvergence* mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ a interval $(-r, r)$ se nazývá *interval absolutní konvergence* řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.

Pro mocninnou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ nastává právě jedna z následujících možností:

(1) $r = 0 \ldots$ řada konverguje pouze ve svém středu, tj. pro $x = 0$

(2) $r = \infty \ldots$ řada konverguje pro $\forall x \in \mathbb{R}$

(3) $r \in (0, \infty) \ldots$ řada konverguje na intervalu $(-r, r)$ a na intervalech $(-\infty, -r)$ a (r, ∞) diverguje

Věta 2.3 *Poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ lze určit jedním z následujících způsobů:*

a) $r = \frac{1}{\lambda}$, *kde* $\lambda = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

b) existuje-li $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda$, *pak* $r = \frac{1}{\lambda}$

c) existuje-li $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lambda$, *pak* $r = \frac{1}{\lambda}$

2.2 Základní vlastnosti

Nechť $r > 0$ je poloměr konvergence a $J = (-r, r)$ interval absolutní konvergence mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.

Věta 2.4 *Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ stejnoměrně konverguje na každém uzavřeném intervalu $<a, b> \subset J$.*

Věta 2.5 (Abelova věta)
Součet řady $s(x)$ je funkce spojitá na intervalu J. Konverguje-li řada v koncovém bodě $-r$ (resp. v bodě r), pak je funkce $s(x)$ spojitá v bodě $-r$ zprava (resp. v bodě r zleva), tj. platí

$$\lim_{x\to -r^+} s(x) = \lim_{x\to -r^+} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(-r)^n$$

$$\left(\text{resp. } \lim_{x\to r^-} s(x) = \lim_{x\to r^-} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n\right)$$

Věta 2.6 *Mocninnou řadu lze na intervalu J derivovat a integrovat člen po členu, tj. $\forall x \in J$ platí*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}$$

$$\int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^x a_n t^n \, dt\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Přitom obě řady na pravých stranách mají stejný poloměr konvergence jako výchozí řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.

Věta 2.7 *Součet mocninné řady $s(x)$ je funkce, která má na intervalu J derivaci libovolného řádu. Pro $\forall x \in J$ a $\forall k \in \mathbb{N}$ navíc platí*

$$s^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} k! \binom{n}{k} a_n x^{n-k}$$

2.3 Rozvoj funkce v mocninnou řadu

Definice 2.4 Nechť je funkce f definovaná na nějakém okolí $\mathcal{U}(x_0)$ bodu $x_0 \in \mathbb{R}$. Jestliže $\forall x \in \mathcal{U}(x_0)$ platí $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, pak říkáme, že *funkci f lze na $\mathcal{U}(x_0)$ rozvinout v mocninnou řadu se středem v bodě x_0.*

Definice 2.5 Nechť má funkce f v bodě x_0 derivace všech řádů. Mocninná řada tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots$$

se nazývá *Taylorova řada funkce f v bodě x_0.*
Je-li $x_0 = 0$, pak se tato řada nazývá *Maclaurinova řada funkce f* (a má tedy tvar $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$).

Věta 2.8 *Nechť má funkce f v bodě x_0 derivace všech řádů. Potom na intervalu I obsahujícím bod x_0 platí rovnost*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

právě tehdy, když pro posloupnost $\{R_n(x)\}$ zbytků v Taylorově vzorci platí $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ pro všechna $x \in I$.

Poznámka: Rozvoje některých význačných funkcí v Maclaurinovu řadu

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} && x\in(-\infty,\infty)\\
\sin x &= \frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} && x\in(-\infty,\infty)\\
\cos x &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} && x\in(-\infty,\infty)\\
(1+x)^\alpha &= 1+\binom{\alpha}{1}x+\binom{\alpha}{2}x^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n && x\in(-1,1)\\
\ln(1+x) &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} && x\in(-1,1)\\
\ln\frac{1+x}{1-x} &= 2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots\right)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} && x\in(-1,1)\\
\frac{1}{1+x} &= 1-x+x^2-\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n && x\in(-1,1)\\
\frac{1}{1+x^2} &= 1-x^2+x^4-\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} && x\in(-1,1)\\
\operatorname{arctg} x &= x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} && x\in<-1,1>
\end{aligned}
$$

Poznámka: Příklady použití rozvojů funkce do mocninné řady

- přibližný výpočet funkčních hodnot
- určování funkčních hodnot logaritmů
- výpočet limit
- přibližný výpočet integrálů
- řešení diferenciálních rovnic