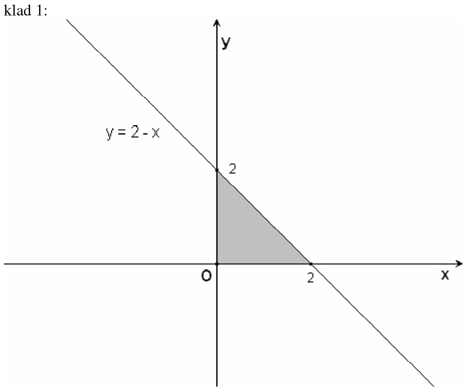
Zapište oblast pomocí nerovností

1. Trojúhelník zadaný body $[0,0],[0,2],[2,0]$

   Přímka spojující body $[0,0],[0,2] : y=0$
   Přímka spojující body $[0,0],[2,0] : x=0$
   Přímka spojující body $[0,2],[2,0] : y=2-x$

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \le & x & \le & 2 \\ 0 & \le & y & \le & 2-x \end{array} \quad \text{nebo} \quad \begin{array}{ccccc} 0 & \le & y & \le & 2 \\ 0 & \le & x & \le & 2-y \end{array}$$

klad 1:

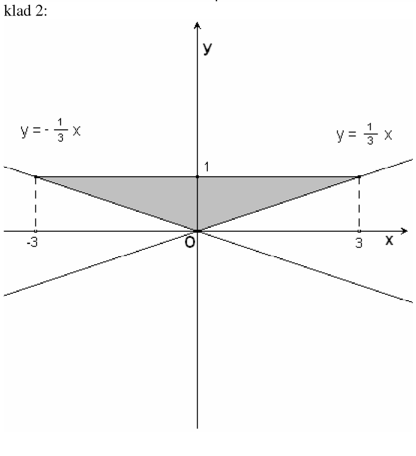


2. Trojúhelník zadaný body $[0,0],[3,1],[-3,1]$

   Přímka spojující body $[0,0],[3,1] : y=\frac{1}{3}x \Rightarrow x=3y$
   Přímka spojující body $[0,0],[-3,1] : y=-\frac{1}{3}x \Rightarrow x=-3y$
   Přímka spojující body $[3,1],[-3,1] : y=1$

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \le & y & \le & 1 \\ -3y & \le & x & \le & 3y \end{array}$$

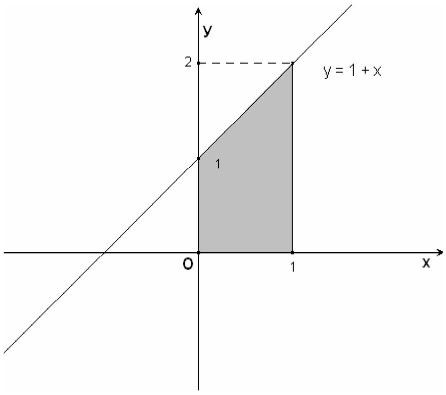
klad 2:



3. Lichoběžník zadaný body $[0,0],[1,0],[1,2],[0,1]$

   Přímka spojující body $[0,0],[1,0] : y=0$
   Přímka spojující body $[0,0],[0,1] : x=0$
   Přímka spojující body $[1,0],[1,2] : x=1$
   Přímka spojující body $[1,2],[0,1] : y=1+x$

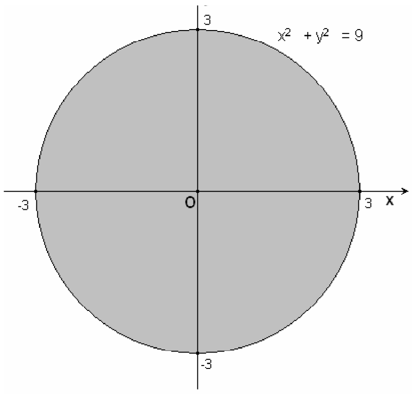
$$\begin{array}{ccccc} 0 & \le & x & \le & 1 \\ 0 & \le & y & \le & 1+x \end{array}$$



4. Kruh $x^2 + y^2 \leq 9$

   Kružnice: $x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow y^2 = 9 - x^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{9 - x^2}$

$$\begin{array}{rcccl} -3 & \leq & x & \leq & 3 \\ -\sqrt{9 - x^2} & \leq & y & \leq & \sqrt{9 - x^2} \end{array}$$

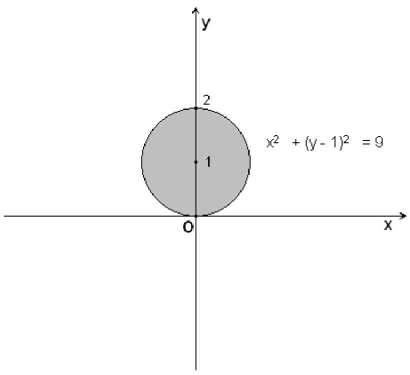


5. Kruh $x^2 + y^2 \leq 2y$

   Úpravou na čtverec dostaneme kruh $x^2 + (y - 1)^2 \leq 1$.
   Kružnice: $x^2 + (y - 1)^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1 - (y - 1)^2}$

$$\begin{array}{rcccl} 0 & \leq & y & \leq & 2 \\ -\sqrt{1 - (y - 1)^2} & \leq & x & \leq & \sqrt{1 - (y - 1)^2} \end{array}$$

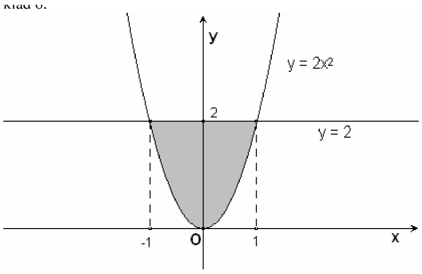
klad 5:



6. Parabolická úseč: $y = 2x^2, y = 2$

Prusečíky: $2 = 2x^2 \Rightarrow 1 = x^2 \Rightarrow x = \pm 1$

$$\begin{array}{rcccl} -1 & \leq & x & \leq & 1 \\ 2x^2 & \leq & y & \leq & 2 \end{array}$$

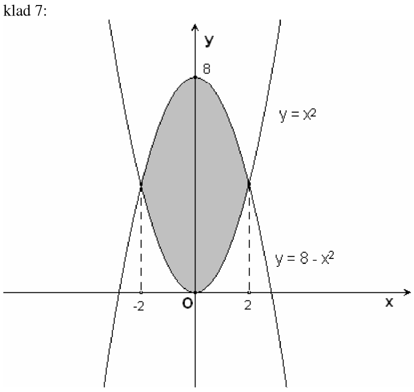


7. Oblast ohraničená křivkami $y = x^2, y = 8 - x^2$

Prusečíky: $x^2 = 8 - x^2 \Rightarrow 8 = 2x^2 \Rightarrow x = \pm 2$

$$\begin{array}{rcccl} -2 & \leq & x & \leq & 2 \\ x^2 & \leq & y & \leq & 8 - x^2 \end{array}$$

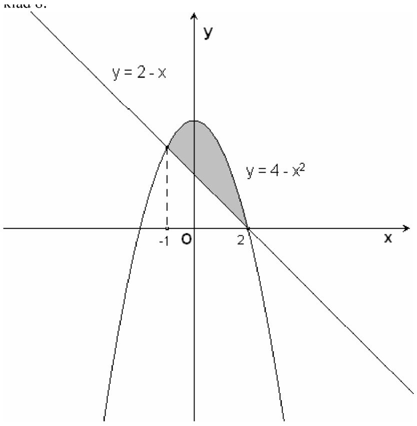
klad 7:



8. Oblast ohraničená křivkami $x + y - 2 = 0, y = 4 - x^2$

Prusečíky: $2 - x = 4 - x^2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = -1$

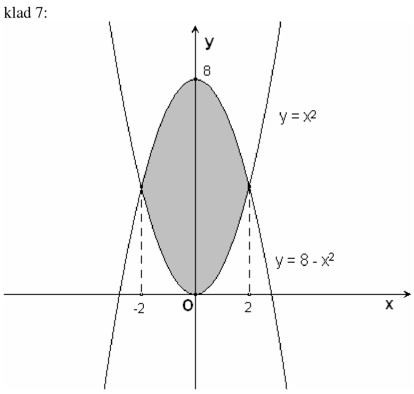
$$\begin{array}{rcccl} -1 & \leq & x & \leq & 2 \\ 2 - x & \leq & y & \leq & 4 - x^2 \end{array}$$



9. Oblast ohraničená křivkami $x = 3, y^2 = 3x$

   Prusečíky: $y^2 = 3 \cdot 3 \Rightarrow y = \pm 3$

$$\begin{array}{rcccl} -3 & \leq & y & \leq & 3 \\ \frac{y^2}{3} & \leq & x & \leq & 3 \end{array}$$



Zapište oblast pomocí nerovností v polárních souřadnicích $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$.

1. Kruh $x^2 + y^2 \leq \frac{1}{9}$

   Dosadíme: $r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r^2 \leq \frac{1}{3}$

$$\begin{array}{rcccl} 0 & \leq & r & \leq & \frac{1}{3} \\ 0 & \leq & \varphi & \leq & 2\pi \end{array}$$

2. Kruh $x^2 + y^2 \leq x$

   Úpravou na čtverec: $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}$
   Dosadíme do původní nerovnosti: $r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2 \leq r\cos\varphi \Rightarrow r \leq \cos\varphi$

$$\begin{array}{rcccl} 0 & \leq & r & \leq & \cos\varphi \\ -\frac{\pi}{2} & \leq & \varphi & \leq & \frac{\pi}{2} \end{array}$$

3. Mezikruží $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$

   $1 \leq r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2 \leq 4 \Rightarrow 1 \leq r \leq 2$

$$\begin{array}{rcccl} 1 & \leq & r & \leq & 2 \\ 0 & \leq & \varphi & \leq & 2\pi \end{array}$$

Zaměňte pořadí integrace

1.
$$\int_0^2 \int_x^{2x} f(x,y)\,dy\,dx = \int_2^4 \int_{\frac{y}{2}}^2 + \int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^y f(x,y)\,dx\,dy$$

2.
$$\int_{-6}^2 \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{-1}^0 \int_{-2\sqrt{1+y}}^{2\sqrt{1+y}} f(x,y)\,dx\,dy + \int_0^8 \int_{-2\sqrt{1+y}}^{2-y} f(x,y)\,dx\,dy$$

3.
$$\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{3\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\,dy$$

4.
$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-x^2} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{-1} 0 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy + \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)\,dx\,dy$$