I. Metrické prostory

Obsah

1 Základní pojmy

Definice 1.1 Množinu všech uspořádaných dvojic (x, y), kde $x, y \in \mathbb{R}$ nazveme *rovinou* (dvojrozměrným prostorem) a označíme ji $\mathbb{R}^2$. Každá uspořádaná dvojice (x, y) se nazývá *bod roviny* a čísla x, y se nazývají *souřadnice* tohoto bodu. Dva body v rovině (x, y) a (u, v) považujeme za shodné (totožné), právě když $x = u$ a $y = v$.

Zvolíme-li v $\mathbb{R}^2$ kartézskou soustavu souřadnic, můžeme každému bodu z $\mathbb{R}^2$ jednoznačně přiřadit uspořádanou dvojici reálných čísel a naopak, každé uspořádané dvojici reálných čísel přiřadíme právě jeden bod z $\mathbb{R}^2$ (tzv. bijekce).

Definice 1.2 Množinu všech uspořádaných trojic (x, y, z), kde $x, y, z \in \mathbb{R}$ nazveme *prostorem* (trojrozměrným prostorem) a označíme ji $\mathbb{R}^3$. Každá uspořádaná trojice (x, y, z) se nazývá *bod prostoru* a čísla x, y, z se nazývají *souřadnice* tohoto bodu. Dva body v prostoru (x, y, z) a (u, v, w) považujeme za shodné (totožné), právě když $x = u$, $y = v$ a $z = w$.

Po zavedení kartézské soustavy souřadnic lze každému bodu z prostoru $\mathbb{R}^3$ jednoznačně přiřadit uspořádanou trojici reálných čísel a naopak.

2 Měření vzdálenosti, metrický prostor

Vzdálenost mezi dvěma prvky je pojem relativní a můžeme ji měřit různě v závislosti na daném prostoru a konkrétní představě. Všechny "druhy" vzdáleností mají ale několik společných vlastností:

Definice 2.1 Nechť $\mathcal{X} \neq \emptyset$ je libovolná množina a ρ zobrazení z $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ do $\mathbb{R}$, které má pro všechna $X, Y, Z \in \mathcal{X}$ následující vlastnosti:

1. $\rho(X, Y) \geq 0$ ... nezápornost
2. $\rho(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y$ ... definitnost
3. $\rho(X, Y) = \rho(Y, X)$ ... symetrie
4. $\rho(X, Y) \leq \rho(X, Z) + \rho(Z, Y)$ ... trojúhelníková nerovnost

Potom uspořádaná dvojice $(\mathcal{X}, \rho)$ se nazývá *metrický prostor*, zobrazení $\rho : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ se nazývá *metrika prostoru* $(\mathcal{X}, \rho)$ a číslo $\rho(X, Y)$ se nazývá *vzdáleností prvků* X a Y v prostoru $(\mathcal{X}, \rho)$.

Poznámka: Na každé neprázdné množině $\mathcal{X}$ lze zadat celou řadu různých metrik. Dostaneme tak různé metrické prostory, které budou mít stejnou základní množinu, tzv. nosič, ale v každém z nich budeme jiným způsobem měřit vzdálenosti.

Na množině $\mathbb{R}^2$ lze definovat mj. následující metriky
($X, Y \in \mathbb{R}^2$, $X = (x_1, x_2)$, $Y = (y_1, y_2)$):

$$\rho(X, Y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} \qquad \text{... eukleidovská vzdálenost}$$

$$\rho_l(X, Y) = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| \qquad \text{... tzv. listonošská vzdálenost}$$

$$\rho_m(X,Y) = \max\{|y_1 - x_1|, |y_2 - x_2|\} \qquad \ldots \text{tzv. maximální vzdálenost}$$

Tyto metriky lze přirozeně rozšířit na množinu $\mathbb{R}^3$
($X, Y \in \mathbb{R}^3$, $X = (x_1, x_2, x_3)$, $Y = (y_1, y_2, y_3)$):

$$\rho(X,Y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2} \qquad \ldots \text{eukleidovská metrika}$$

$$\rho_l(X,Y) = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| + |y_3 - x_3| \qquad \ldots \text{tzv. oktaedrická metrika}$$

$$\rho_m(X,Y) = \max\{|y_1 - x_1|, |y_2 - x_2|, |y_3 - x_3|\} \qquad \ldots \text{tzv. kubická metrika}$$

3 Okolí v metrickém prostoru

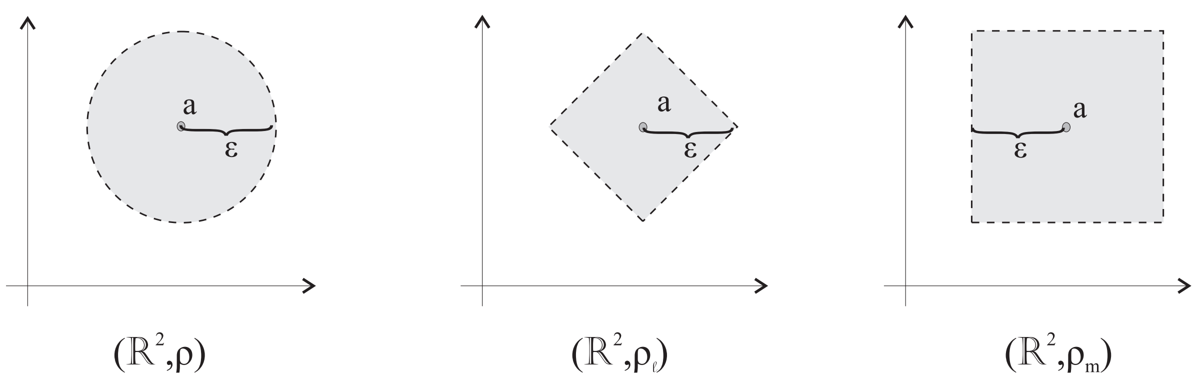
Definice 3.1 Nechť $a \in (\mathcal{X}, \rho)$ a $\varepsilon > 0$. Množinu všech bodů $x \in (\mathcal{X}, \rho)$, pro které platí $\rho(x, a) < \varepsilon$ nazýváme *ε-okolím bodu a v prostoru $(\mathcal{X}, \rho)$* a značíme ji $\mathcal{U}(a, \varepsilon)$; tj.

$$\mathcal{U}(a, \varepsilon) = \{x \in (\mathcal{X}, \rho);\ \rho(x, a) < \varepsilon\}.$$

Redukovaným ε-okolím bodu a v prostoru $(\mathcal{X}, \rho)$ nazýváme množinu

$$\mathcal{U}^*(a, \varepsilon) = \{x \in (\mathcal{X}, \rho);\ 0 < \rho(x, a) < \varepsilon\}.$$

Příklad:
Jak vypadá $\mathcal{U}(a, \varepsilon)$ v prostorech $(\mathbb{R}^2, \rho)$, $(\mathbb{R}^2, \rho_l)$ a $(\mathbb{R}^2, \rho_m)$?



4 Zobecněná koule

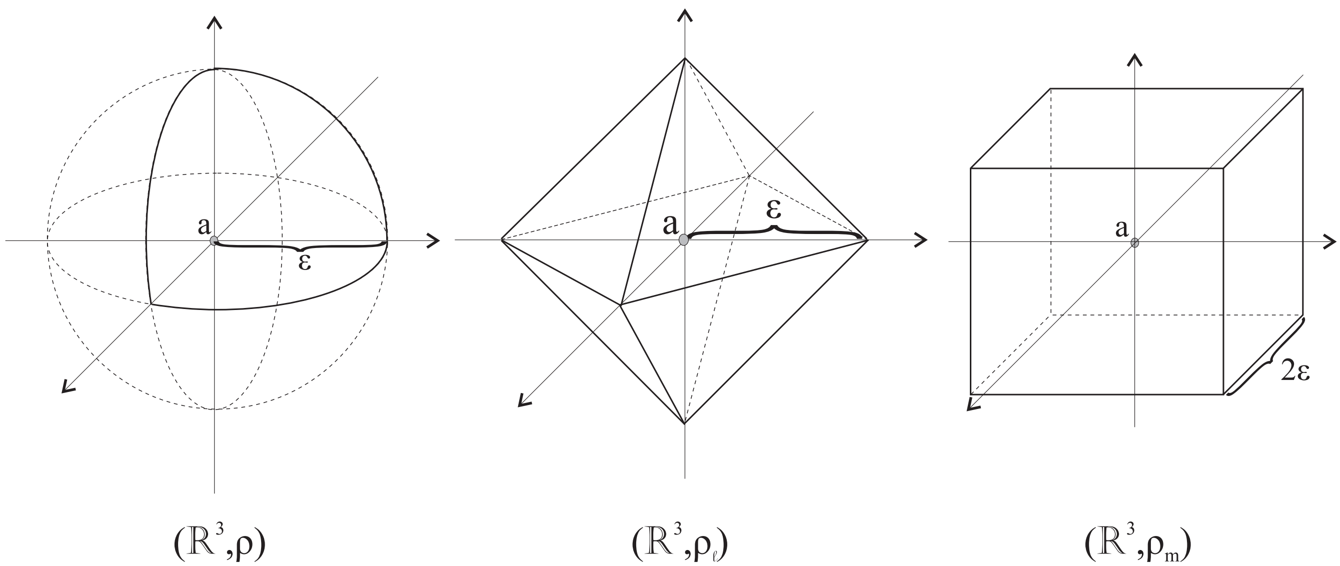
Definice 4.1 Nechť $a \in (\mathcal{X}, \rho)$ a $\varepsilon > 0$. Potom

- množina $\Omega(a, \varepsilon) = \{x \in (\mathcal{X}, \rho);\ \rho(x, a) < \varepsilon\}$ se nazývá *otevřená koule* (*zobecněná otevřená koule*) *se středem v bodě a a poloměrem ε* (tj. $\Omega(a, \varepsilon) = \mathcal{U}(a, \varepsilon)$);

- množina $\overline{\Omega}(a,\varepsilon) = \{x \in (\mathcal{X},\rho);\ \rho(x,a) \le \varepsilon\}$ se nazývá *uzavřená koule se středem v bodě a a poloměrem ε*;

- množina $\mathcal{S}(a,\varepsilon) = \{x \in (\mathcal{X},\rho);\ \rho(x,a) = \varepsilon\}$ se nazývá *sféra se středem v bodě a a poloměrem ε*.

Příklad:
Jak vypadá uzavřená koule $\overline{\Omega}(a,\varepsilon))$ v prostorech $(\mathbb{R}^3,\rho)$, $(\mathbb{R}^3,\rho_l)$ a $(\mathbb{R}^3,\rho_m)$?



5 Některé význačné body a množiny metrického prostoru

Definice 5.1 Nechť $\mathcal{X}$ je metrický prostor s metrikou ρ.

- Nechť $A \subset \mathcal{X}$. Bod $a \in A$ se nazývá *vnitřním bodem množiny A*, jestliže existuje okolí $\mathcal{U}(a)$ bodu a tak, že $\mathcal{U}(a) \subset A$. Množina všech vnitřních bodů množiny A se nazývá *vnitřek množiny A* a značí se A° nebo int$A$.

- Množina A se nazývá *otevřená*, jestliže $A = A^\circ$.

- Nechť $A \subset \mathcal{X}$. Bod $a \in \mathcal{X}$ se nazývá *hromadným bodem množiny A*, jestliže každé jeho redukované okolí obsahuje aspoň jeden bod $y \in A$ (nebo ekvivalentně, jestliže každé jeho okolí obsahuje nekonečně mnoho bodů z množiny A). Množina všech hromadných bodů množiny A se nazývá *derivace množiny A* a značí se A'.

- Bod $a \in A$, který není hromadným bodem množiny A se nazývá *izolovaným bodem množiny A*.

- Nechť $A \subset \mathcal{X}$. Potom se sjednocení $A \cup A'$ nazývá *uzávěr množiny* A a značí se $\overline{A}$.
- Množina A se nazývá *uzavřená*, jestliže $A = \overline{A}$.
- Nechť $A \subset \mathcal{X}$. Bod $a \in \mathcal{X}$ se nazývá *hraničním bodem množiny* A, jestliže každé jeho okolí obsahuje aspoň jeden bod z A a aspoň jeden bod z $\mathcal{X} \setminus A$. Množina všech hraničních bodů množiny A se nazývá *hranice množiny* A a značí se $\mathrm{h}(A)$ nebo $\mathrm{bd}(A)$.

Nechť $(\mathcal{X}, \rho)$ je metrický prostor konečné dimenze. Potom můžeme definovat následující vlastnosti množin:

- Množina $A \subset \mathcal{X}$ se nazývá *souvislá*, můžeme-li každé její dva body spojit lomenou čarou, která celá leží v A.
- Otevřená souvislá množina $A \subset \mathcal{X}$ se nazývá *oblast*.
- Množina $A \subset \mathcal{X}$ se nazývá *omezená*, jestliže existuje číslo $K > 0$ tak, že $A \subset \Omega(0, K)$.
- Množina $A \subset \mathcal{X}$ se nazývá *kompaktní*, je-li uzavřená a omezená.
- Množina $A \subset \mathcal{X}$ se nazývá *konvexní*, lze-li každé dva její body spojit úsečkou ležící v A.