Obsah

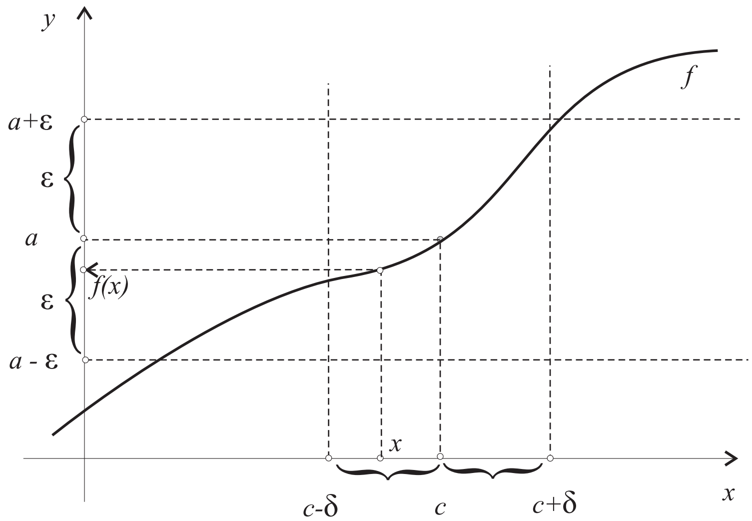
3 Limita funkce

3.1 Limita funkce v bodě

Definice 3.1 Nechť $c \in \mathbb{R}$ je hromadným bodem definičního oboru funkce f. Říkáme, že *funkce f má v bodě c vlastní limitu $a \in \mathbb{R}$*, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in Df \quad 0 < |x - c| < \delta \, : \, |f(x) - a| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to c} f(x) = a$$

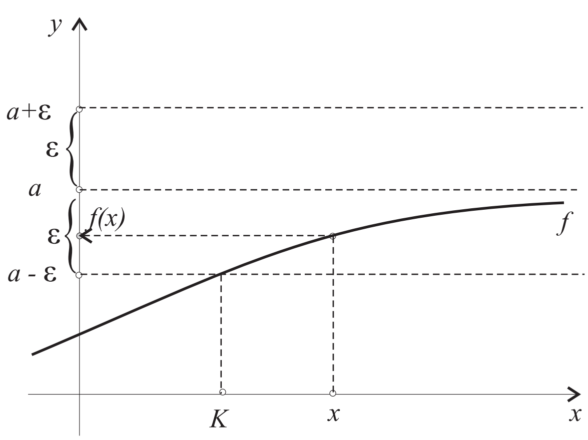


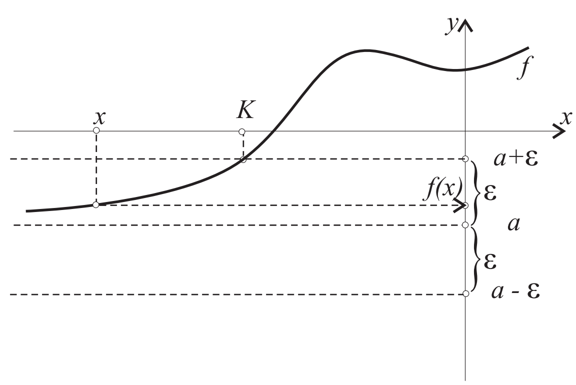
Definice 3.2 Nechť ∞ (resp. $-\infty$) je hromadným bodem definičního oboru funkce f. Říkáme, že *funkce f má vlastní limitu $a \in \mathbb{R}$ v (nevlastním) bodě ∞ (resp. $-\infty$)*, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \in \mathbb{R} \quad \forall x \in Df \quad x > K \, : \, |f(x) - a| < \varepsilon$$

$$(\text{ resp.} \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \in \mathbb{R} \quad \forall x \in Df \quad x < K \, : \, |f(x) - a| < \varepsilon \qquad)$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = a \qquad\qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = a$$



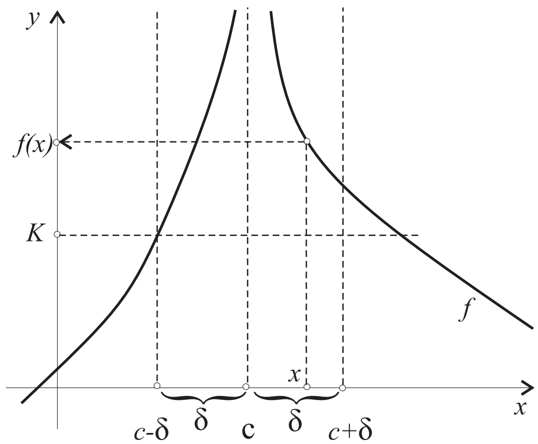


Definice 3.3 Nechť $c \in \mathbb{R}$ je hromadným bodem definičního oboru funkce f. Říkáme, že *funkce f má v bodě c nevlastní limitu ∞ (resp. $-\infty$)*, jestliže

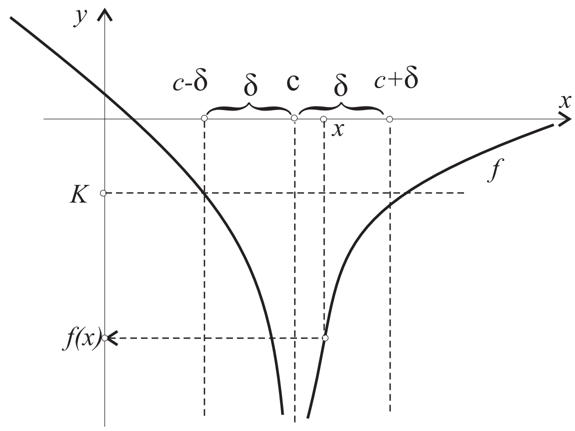
$$\forall K \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in Df \quad 0 < |x - c| < \delta \, : \, f(x) > K$$

$$(\,\text{resp.} \qquad \forall K \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in Df \quad 0 < |x - c| < \delta \, : \, f(x) < K \quad)$$

$$\lim_{x \to c} f(x) = \infty$$



$$\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$$



Definice 3.4 Nechť ∞ je hromadným bodem definičního oboru funkce f. Říkáme, že *funkce f má nevlastní limitu ∞ (resp. $-\infty$) v nevlastním bodě ∞*, jestliže

$$\forall K \in \mathbb{R} \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in Df \quad x > M \, : \, f(x) > K$$

$$(\,\text{resp.} \qquad \forall K \in \mathbb{R} \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in Df \quad x > M \, : \, f(x) < K \qquad)$$

Definice 3.5 Nechť $-\infty$ je hromadným bodem definičního oboru funkce f. Říkáme, že *funkce f má nevlastní limitu ∞ (resp. $-\infty$) v nevlastním bodě $-\infty$*, jestliže

$$\forall K \in \mathbb{R} \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in Df \quad x < M \, : \, f(x) > K$$

$$(\,\text{resp.} \qquad \forall K \in \mathbb{R} \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in Df \quad x < M \, : \, f(x) < K \qquad)$$

3.2 Jednostranné limity

Definice 3.6 Nechť $c \in \mathbb{R}$ je hromadným bodem definičního oboru funkce f zleva (resp. zprava). Říkáme, že *funkce f má v bodě c vlastní limitu $a \in \mathbb{R}$ zleva (resp. zprava)*, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in Df \quad c - \delta < x < c \, : \, |f(x) - a| < \varepsilon$$

$$(\,\text{resp.} \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in Df \quad c < x < c + \delta \, : \, |f(x) - a| < \varepsilon \qquad)$$

Analogicky lze definovat i nevlastní jednostranné limity.

Věta 1 *Nechť c je hromadným bodem definičního oboru funkce f. Potom*

$$\lim_{x \to c} f(x) = a \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} \text{1. existují obě jednostranné limity} \\ \text{2. } \lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^-} f(x) = a \end{array}$$

3.3 Vlastnosti limit funkcí

Věta 2 *Každá funkce má v bodě nejvýše jednu limitu.*

Věta 3 *Konstantní funkce má limitu v každém bodě svého definičního oboru.*

Věta 4 *Uvažujme funkce f a g. Nechť $c \in \mathbb{R}^*$ a nechť existuje $P(c)$ (tj. redukované okolí bodu c) tak, že $\mathcal{U}^*(c) \cap Df = \mathcal{U}^*(c) \cap Dg \neq \emptyset$. Nechť dále pro všechna $x \in \mathcal{U}^*(c) \cap Df$ platí $f(x) = g(x)$. Potom $\lim_{x\to c} f(x)$ existuje právě tehdy, když existuje $\lim_{x\to c} g(x)$ a přitom se obě limity rovnají.*

Věta 5 *Nechť $\lim_{x\to c} f(x) = a \in \mathbb{R}$ (vlastní limita v bodě c). Potom existuje redukované okolí $\mathcal{U}^*(c)$ tak, že f je omezená na množině $\mathcal{U}^*(c) \cap Df$.*

Věta 6 (Algebraické operace s limitami) *Nechť c je hromadným bodem definičních oborů funkcí f a g. Nechť existují limity $\lim_{x\to c} f(x) \in \mathbb{R}^*$ a $\lim_{x\to c} g(x) \in \mathbb{R}^*$. Potom platí*

$$\lim_{x\to c} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) \pm \lim_{x\to c} g(x)$$

$$\lim_{x\to c} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x)$$

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$$

$$\lim_{x\to c} |f(x)| = |\lim_{x\to c} f(x)|$$

jestliže mají výrazy na pravé straně smysl v $\mathbb{R}^*$.

Věta 7

$$\lim_{x\to c} f(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to c} |f(x)| = 0$$

$$\lim_{x\to c} |f(x)| = \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to c} \frac{1}{f(x)} = 0$$

Věta 8 *Nechť $\lim_{x\to c} f(x) = a \neq 0$ a $\lim_{x\to c} g(x) = 0$. Potom*

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \infty & \text{pokud } \operatorname{sgn} a = \operatorname{sgn} g(x) \text{ na nějakém } \mathcal{U}^*(c) \\ -\infty & \text{pokud } \operatorname{sgn} a = -\operatorname{sgn} g(x) \text{ na nějakém } \mathcal{U}^*(c) \end{cases}$$

Věta 9 *Nechť $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ a nechť je funkce $g(x)$ omezená na nějakém redukovaném okolí $\mathcal{U}^*(c)$. Potom $\lim_{x\to c} (f(x) \cdot g(x)) = 0$.*

Věta 10 (o limitě tří funkcí) *Nechť pro funkce f, g a h platí*

- *$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ na nějakém $\mathcal{U}^*(c)$*
- *existují limity $\lim_{x\to c} f(x)$ a $\lim_{x\to c} h(x)$*
- *$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} h(x) = a$*

Potom existuje i limita $\lim_{x\to c} g(x)$ a platí $\lim_{x\to c} g(x) = a$.

3.4 Výpočet limit funkcí

Věta 11 (o limitě složené funkce) *Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}^*$. Nechť je složená funkce $g \circ f$ definovaná na množině $\{x \in Df;\ f(x) \in Dg\} \neq \emptyset$. Nechť*

$$\lim_{x \to c} f(x) = a \qquad a \qquad \lim_{y \to a} g(y) = b.$$

Nechť je dále splněna alespoň jedna z podmínek

- *existuje $\mathcal{U}^*(c)$ tak, že pro všechna $x \in \mathcal{U}^*(c) \cap Df$ platí $f(x) \neq a$*
- *$g(a) = b$.*

Potom existuje limita složené funkce $g \circ f$ v bodě c a platí

$$\lim_{x \to c} g(f(x)) = b$$

Dále se při výpočtu limit funkcí používají věty uvedené v předchozí kapitole, znalosti význačných limit některých elementárních funkcí a také několik vzorečků:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{pro } 0 \leq a < 1 \\ 1 & \text{pro } a = 1 \\ \infty & \text{pro } a > 1 \end{cases} \qquad \lim_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} \infty & \text{pro } 0 < a < 1 \\ 1 & \text{pro } a = 1 \\ 0 & \text{pro } a > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \qquad \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

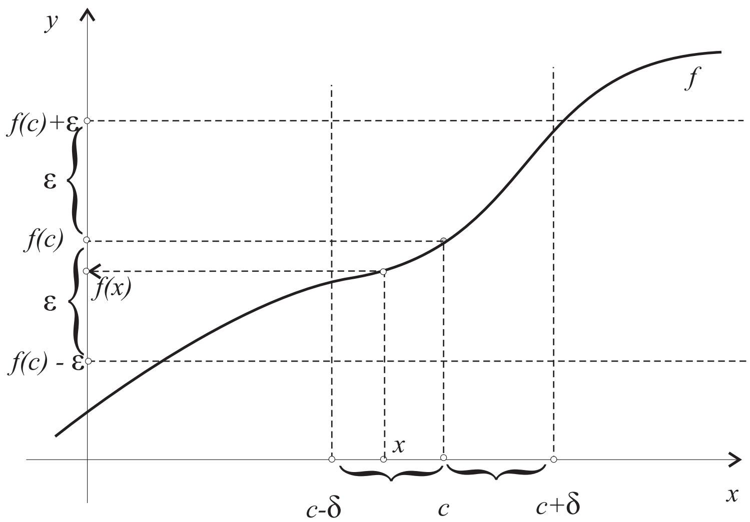
$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \text{ kde } a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}, \qquad \text{speciálně} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

4 Spojitost funkce

4.1 Spojitost funkce v bodě

Definice 4.1 Nechť $c \in Df$. Funkce f se nazývá *spojitá v bodě* c, jestliže pro všechna $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x \in Df$ splňující $|x - c| < \delta$ platí $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$, tj.jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in Df \quad |x - c| < \delta \, : \, |f(x) - f(c)| < \varepsilon$$



Věta 12 *Nechť $d \in Df$ je izolovaným bodem def. oboru funkce f. Pak je funkce f spojitá v bodě c.*

Věta 13 *Nechť $c \in Df$ je hromadným bodem definičního oboru funkce f. Potom platí*

$$f \text{ je spojitá v bodě } c \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

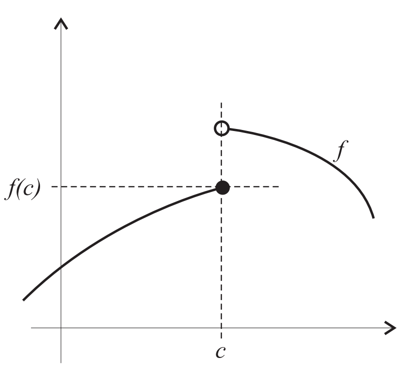
Definice 4.2 Nechť $c \in Df$.

- Nechť c je hromadným bodem Df zleva. Funkce f se nazývá *spojitá zleva v bodě* c, jestliže

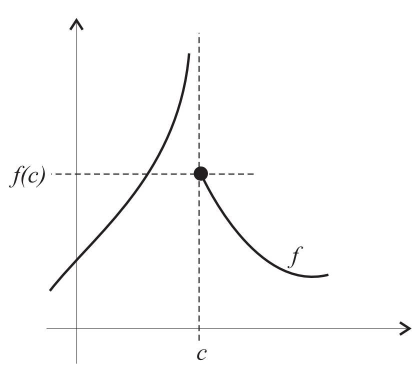
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in Df \quad c - \delta < x \leq c \, : \, |f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

- Nechť c je hromadným bodem Df zprava. Funkce f se nazývá *spojitá zprava v bodě* c, jestliže

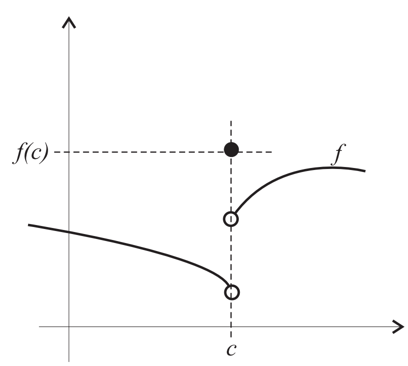
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in Df \quad c \leq x < c + \delta \, : \, |f(x) - f(c)| < \varepsilon$$



f spojitá v c pouze zleva



f spojitá v c pouze zprava



f není spojitá v c ani zleva ani zprava

Věta 14 *Nechť $c \in Df$ je hromadným bodem Df zleva i zprava. Potom*

$$f \text{ je spojitá v bodě } c \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ je spojitá v bodě } c \text{ zleva i zprava}$$

4.2 Vlastnosti funkcí spojitých v bodě

Věta 15 *Nechť f je spojitá v bodě $c \in Df$. Potom existuje okolí $\mathcal{U}(c)$ takové, že funkce f je omezená na $\mathcal{U}(c) \cap Df$.*

Věta 16 *Nechť f je spojitá v bodě $c \in df$ a nechť $f(c) < 0$ (resp. $f(c) > 0$). Potom existuje okolí $\mathcal{U}(c)$ tak, že $f(x) < 0$ pro všechna $x \in \mathcal{U}(c) \cap Df$ (resp. $f(x) > 0$ pro všechna $x \in \mathcal{U}(c) \cap Df$).*

Věta 17 *Nechť jsou funkce f a g spojité v bodě $c \in Df \cap Dg (\neq \emptyset)$. Potom jsou v bodě c spojité i funkce $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ (pro $g(c) \neq 0$) a $|f|$.*

Věta 18 (o spojitosti složené funkce) *Nechť je funkce f spojitá v bodě $c \in Df$ a nechť je funkce g spojitá v bodě $y = f(c) \in Dg$ (tj. platí $Hf \cap Dg \neq \emptyset$). Potom je složená funkce $f \circ g$ spojitá v bodě c.*

Věta 19 (o spojitosti inverzní funkce) *Nechť je funkce f prostá na Df a nechť je spojitá v bodě $c \in Df$. Potom funkce f^{-1} (inverzní funkce k funkci f) je spojitá v bodě $f(c)$.*

4.3 Body nespojitosti

Definice 4.3 Nechť c je hromadným bodem Df. Říkáme, že funkce f *má v bodě c odstranitelnou nespojitost*, jestliže

- existuje vlastní limita $\lim_{x \to c} f(x) = a \in \mathbb{R}$,
- existuje-li $f(c)$, pak $f(c) \neq a$.

Definice 4.4 Říkáme, že funkce f *má v bodě $c \in \mathbb{R}$ nespojitost 1.druhu (typu skok)*, jestliže existují vlastní jednostanné limity v bodě c, ale přitom se nerovnají, tj. jestliže

$$\lim_{x \to c^+} f(x) \neq \lim_{x \to c^-} f(x)$$

Definice 4.5 Říkáme, že funkce f *má v bodě $c \in \mathbb{R}$ nespojitost 2.druhu*, jestliže aspoň jedna jednostranná limita v bodě c neexistuje nebo je nevlastní.

4.4 Spojitost funkce na množině

Definice 4.6 (spojitost funkce na množině)

- Funkce f se nazývá *spojitá na neprázdné množině $M \subset Df$*, jestliže je spojitá v každém bodě množiny M. Je-li $M = Df$, f se nazývá *spojitá na definičním oboru*, krátce *spojitá*.
- Je-li $M \subset Df$ interval s krajními body a a b, kde $a < b$, potom se funkce f nazývá *spojitá na intervalu M*, jestliže je spojitá v každém vnitřním bodě množiny M a pokud $a \in M$, resp. $b \in M$, je spojitá v bodě a zprava, resp. v bodě b zleva.

Věta 20 *Každá základní elementární funkce je spojitá (na Df.*

Věta 21 *Součet, rozdíl, součin a podíl dvou spojitých funkcí, absolutní hodnota spojité funkce a funkce složená ze dvou spojitých funkcí jsou funkce spojité.*

Věta 22 *Každá elementární funkce je spojitá.*

Věta 23 *Je-li funkce spojitá (na Df), pak je spojitá na každé podmnožině svého definičního oboru.*

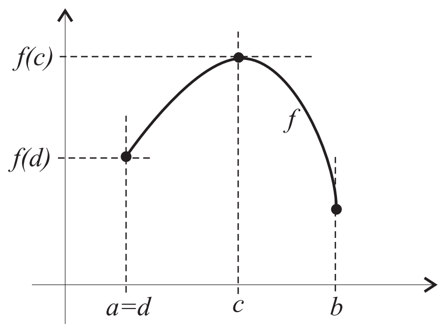
Definice 4.7 Funkce f se nazývá *po částech spojitá na intervalu $I \subset Df$*, má-li na intervalu I nejvýše konečný počet bodů odstranitelné nespojitosti a nespojitostí 1.druhu (skoků) a přitom nemá žádné body nespojitosti 2.druhu.

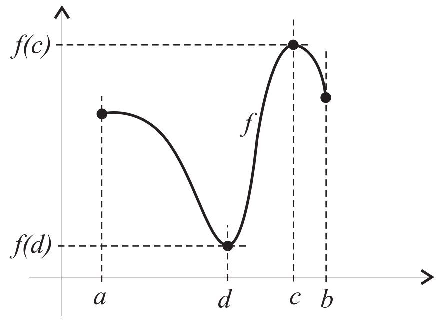
4.5 Funkce spojité na uzavřeném intervalu

Věta 24 (1. Weirstrassova) *Nechť f je spojitá na intervalu $< a, b >$. Pak je funkce f na $< a, b >$ omezená.*

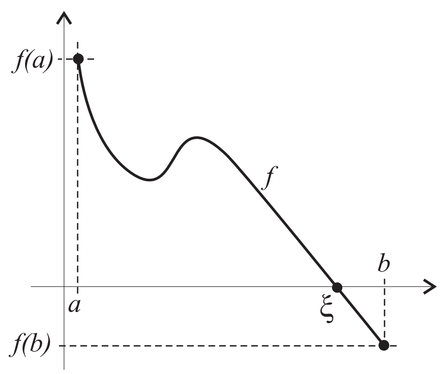
Věta 25 (2. Weierstrassova) *Nechť f je spojitá na intervalu $< a, b >$. Pak funkce f nabývá na $< a, b >$ svou největší i nejmenší hodnotu (tj. existují body $c, d \in< a, b >$ takové, že*

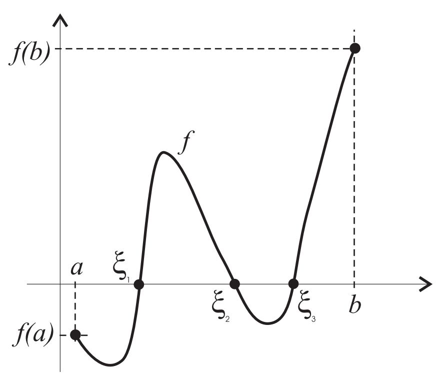
$$f(c) = \max\{f(x);\ x \in< a, b >\} \quad a \quad f(d) = \min\{f(x);\ x \in< a, b >\}\ )$$





Věta 26 (1. Bolzanova) *Nechť f je spojitá na intervalu J. Nechť $a, b \in J$, $a < b$ a nechť $f(a) \cdot f(b) < 0$. Potom existuje aspo jeden bod $\xi \in (a, b)$ takový, že $f(\xi) = 0$.*





Věta 27 (2. Bolzanova; o mezihodnotě) *Nechť f je spojitá na intervalu J. Nechť $a, b \in J$, $a < b$ a nechť $f(a) \neq f(b)$. Potom ke každému číslu γ ležícímu mezi body $f(a)$ a $f(b)$ existuje aspoň jeden bod $\xi \in (a, b)$ takový, že $f(\xi) = \gamma$.*