Obsah

7 Neurčitý integrál **2**

7.1 Primitivní funkce a neurčitý integrál . . . 2

7.2 Metody výpočtu primitivní funkce . . . 3

7.3 Integrace racionálních funkcí . . . 4

7.4 Speciální substituce . . . 4

8 Určitý integrál **6**

8.1 Motivace a definice . . . 6

8.2 Podmínky integrovatelnosti . . . 8

8.3 Vlastnosti $\mathcal{R}$-integrálu . . . 8

8.4 Výpočet $\mathcal{R}$-integrálu . . . 9

8.5 Aplikace určitého integrálu . . . 10

7 Neurčitý integrál

Integrální počet vznikl v návaznosti na diferenciální počet na přelomu 17. a 18. století. vzužívá se ve fyzice, matematice, statistice, v ekonomických a mnoha dalších vědách (obsahy ploch, povrchy a objemy těles, těžiště atd.)

Dvě opačné úlohy:

- k funkci f nalézt funkci (derivaci) F tak, aby $f' = F$ (derivování)
- k funkci f nalézt funkci (primitivní funkci) F tak, aby $F' = f$ (integrování)

7.1 Primitivní funkce a neurčitý integrál

Definice 7.1 Nechť jsou funkce f a F definovány na intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce F je *primitivní funkcí* k funkci f na intervalu I, jestliže

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in I.$$

Věta 7.1 *Ke každé funkci f spojité na I existuje primitivní funkce na I.*

Věta 7.2 *Je-li F primitivní funkce k funkci f na I a $c \in \mathbb{R}$ libovolné číslo, potom každá funkce $G(x) = F(x) + c$, $\forall x \in I$ je primitivní funkcí k f na I.*

Věta 7.3 *Jsou-li F a G primitivní funkce k f na I, potom je funkce $F - G$ konstantní na I.*

Definice 7.2 *Neurčitým integrálem funkce f na intervalu I* nazýváme množinu všech primitivních funkcí k funkci f na I, tj. množinu

$$\int f(x)\,dx = \{F(x) + c\,;\, c \in \mathbb{R}, F(x) \text{ je primitivní funkce k } f\}.$$

Proces nalezení primitivní funkce k funkci f se nazývá *integrování.*

Poznámka: Z definice integrálu přímo plynou vztahy

$$\int f'(x)\,dx = f(x) \qquad\qquad \left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$$

7.2 Metody výpočtu primitivní funkce

$$
\begin{aligned}
\int a\,dx &= ax && a \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R} \\
\int x^n\,dx &= \tfrac{x^{n+1}}{n+1} && n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R} \\
\int x^\alpha\,dx &= \tfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} && \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\},\ x \in \mathbb{R}^+ \\
\int \tfrac{1}{x} dx &= \ln|x| && x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\
\int e^x\,dx &= e^x && x \in \mathbb{R} \\
\int a^x\,dx &= \tfrac{a^x}{\ln a} && a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\},\ x \in \mathbb{R} \\
\int \sin x\,dx &= -\cos x && x \in \mathbb{R} \\
\int \cos x\,dx &= \sin x && x \in \mathbb{R} \\
\int \tfrac{1}{\cos^2 x} dx &= \operatorname{tg} x && x \in \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\} \\
\int \tfrac{1}{\sin^2 x} dx &= -\operatorname{cotg} x && x \in \mathbb{R} \setminus \{k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\} \\
\int \tfrac{1}{1+x^2} dx &= \operatorname{arctg} x && x \in \mathbb{R} \\
\int \tfrac{1}{1+x^2} dx &= -\operatorname{arccotg} x && x \in \mathbb{R} \\
\int \tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \arcsin x && x \in (-1, 1) \\
\int \tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= -\arccos x && x \in (-1, 1)
\end{aligned}
$$

Věta 7.4 *Nechť k funkcím f a g existují primitivní funkce na I a nechť $c \in \mathbb{R}$. Potom funkce $f \pm g$ a $c \cdot f$ mají primitivní funkce na I a platí*

$$\int (f(x) \pm g(x))\ dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

$$\int c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int f(x)\,dx$$

Věta 7.5 (Metoda per partes) *Nechť funkce u a v mají na intervalu I spojité derivace u' a v'. Potom platí*

$$\int u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\ dx$$

Věta 7.6 (Substituční metoda) *Nechť $f(t)$ je spojitá na intervalu (a, b), nechť funkce $\varphi(x)$ má na intervalu (α, β) spojitou derivaci a nechť $\varphi(x) \in (a, b)$ pro každé $x \in (\alpha, \beta)$. Potom na intervalu (α, β) platí*

$$\int f(t)\,dt = \int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,dx$$

kde $t = \varphi(x)$.

7.3 Integrace racionálních funkcí

Integrujeme funkci
$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$
kde P a Q jsou polynomy proměnné x a $Q \neq 0$.

1. Pokud $st.P \geq st.Q$, vydělíme a dostaneme
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$
kde $st.R < st.Q$ (tj. $\frac{R}{Q}$ je ryze racionální funkce).

2. Funkci $\frac{R(x)}{Q(x)}$ rozložíme na parciální zlomky (součin $\Rightarrow$ součet)

3. Zintegrujeme jednotlivé parciální zlomky a případně polynom $M(x)$

Integrace parciálních zlomků

$$\int \frac{A}{x-\alpha}\, dx = A \cdot \ln|x-\alpha| + c,\ c \in \mathbb{R}$$
$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^k}\, dx = \frac{A}{1-k} \cdot \frac{1}{(1-\alpha)^{k-1}} + c,\ c \in \mathbb{R}$$
$$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}\, dx = \frac{B}{2} \ln|x^2+px+q| + \left(C - \frac{Bp}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\right) + c,\ c \in \mathbb{R}$$

7.4 Speciální substituce

$R(x)$ ... racionální funkce proměnné x
$R(x,y)$ ... racionální funkce dvou proměnných x a y, tj.
$$R(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)},$$
kde P a Q jsou polynomy dvou proměnných x a y, tj. jsou to funkce tvaru
$$P(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x^i y^j, \text{ kde } a_{ij} \in \mathbb{R}.$$

1. $$\int R(e^{\alpha x})\, dx$$
Substituce: $t = e^{\alpha x}$, $dx = \frac{1}{\alpha t} dt$

2. $$\int R(\ln x) \frac{dx}{x}$$
Substituce: $t = \ln x$, $dt = \frac{dx}{x}$

3.

$$\int R(x, \sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}})\,dx$$

Substituce: $t = \sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, $x = \ldots$, $dx = \ldots$

4.

$$\int R(\cos x, \sin x)\,dx$$

a) $R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x)$ ... lichá v $\sin x$
Substituce: $t = \cos x$, $dt = -\sin x\,dx$

b) $R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x)$ ... lichá v $\cos x$
Substituce: $t = \sin x$, $dt = \cos x\,dx$

c) $R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x)$ ... lichá v obou
Substituce: $t = \operatorname{tg} x$, $x = \operatorname{arctg} x$, $dx = \frac{1}{1+t^2}dt$
(primitivní funkce hledáme na intervalu délky π)

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \qquad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

d) Univerzální substituce
Substituce: $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $x = 2\operatorname{arctg} x$, $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$
(primitivní funkce hledáme na intervalu délky 2π)

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

5.

$$\text{a)} \int \sqrt{x^2-a^2}\,dx \qquad \text{b)} \int \sqrt{x^2+a^2}\,dx \qquad \text{c)} \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

(goniometrické a hyperbolické substituce)

a) Substituce: $x = \pm|a|\cosh t$, $x = |a|\operatorname{cotgh} t$; $dx = \ldots$

b) Substituce: $x = |a|\sinh t$, $x = |a|\operatorname{tg} t$, $x = |a|\operatorname{cotg} t$; $dx = \ldots$

c) Substituce: $x = |a|\sin t$, $x = |a|\cos t$, $x = |a|\operatorname{tgh} t$; $dx = \ldots$

6.

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$$

(Eulerovy substituce)

I. $a > 0$ ... položíme $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x + t$ a vypočítáme $x = \ldots$, $dx = \ldots$

II. $c > 0$ ... položíme $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$ a vypočítáme (pro $x \neq 0$!!) $x = \ldots$, $dx = \ldots$

III. ax^2+bx+c má reálné kořeny α_1 a α_2; potom

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = |x-\alpha_1| \cdot \sqrt{a \cdot \frac{x-\alpha_2}{x-\alpha_1}}$$

a použijeme substituce stejné jako u 3.

Specielně pokud máme integrál tvaru

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx,$$

kde P je polynom, použijeme tzv. algebraickou metodu Ostrogradského.

7.

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx, \quad m,n,p\in\mathbb{Q} \qquad \text{(binomický integrál)}$$

I. $p\in\mathbb{Z}$ ... položíme $x=t^s$, kde s je společný jmenovatel zlomků m a n

II. $\frac{m+1}{n}\in\mathbb{Z}$ ... položíme $a+bx^n=t^s$, kde s je jmenovatel zlomku p a dopočítáme $x=\dots$

III. $\frac{m+1}{n}+p\in\mathbb{Z}$ (a $x\neq 0$) ... položíme $ax^{-n}+b=t^s$, kde s je jmenovatel zlomku p a dopočítáme $x=\dots$

8.

$$\int \cos^\alpha x\cdot\sin^\beta x\,dx \qquad \alpha,\beta\in\mathbb{Q}$$

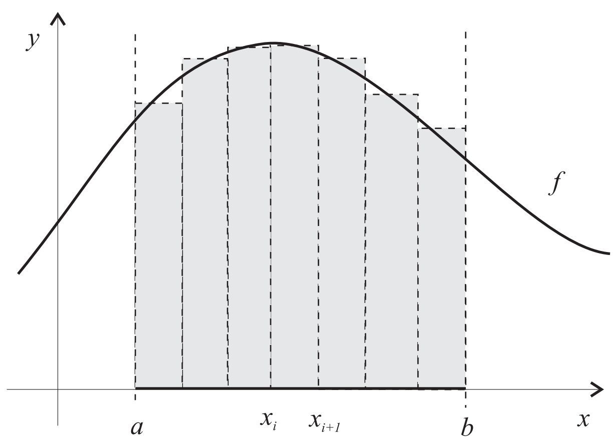
- $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$ ... viz 4.
- $\alpha,\beta\notin\mathbb{Z}$ ... substitucí $z=\sin^2 x$ převedeme na binomický integrál

$$\frac{1}{2}\int(1-z)^{\frac{\alpha-1}{2}}\cdot z^{\frac{\beta-1}{2}}\,dz$$

a použijeme příslušné substituce

8 Určitý integrál

8.1 Motivace a definice



Nechť funkce f je nezáporná a omezená na (omezeném) intervalu $< a,b >$.
Chceme určit obsah plochy vymezené grafem funkce f, přímkami $x=a$, $x=b$ a osou x.
Postup: plochu aproximujeme útvary, jejichž obsah umíme snadno spočítat (viz obrázek).

Definice 8.1 *Dělením* uzavřeného intervalu $< a,b >$ nazýváme konečnou množinu bodů z $< a,b >$ $D=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ takovou, že $a=x_0<x_1<\dots<x_{n-1}<x_n=b$. Body $x_0,x_1,\dots,x_n$ se nazývají *dělicí body* intervalu $< a,b >$; interval $< x_{i-1},x_i >$ se nazývá *i-tý dělicí interval*; číslo $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ se nazývá *délka i-tého dělicího intervalu.*

Na každém intervalu $< a,b >$ existuje nekonečně mnoho různých dělení; množinu všech dělení intervalu $< a,b >$ označíme jako $\mathcal{D}(< a,b >)$.

Definice 8.2 Nechť je funkce f omezená na intervalu $< a, b >$ a nechť $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ je nějaké dělení intervalu $< a, b >$. Označme pro všechna $i = 1, \ldots n$

$$m_i = \inf \big\{ f(x);\ x \in < x_{i-1}, x_i > \big\} \ldots \text{infimum funkce } f \text{ na intervalu } < x_{i-1}, x_i >,$$

$$M_i = \sup \big\{ f(x);\ x \in < x_{i-1}, x_i > \big\} \ldots \text{supremum funkce } f \text{ na intervalu } < x_{i-1}, x_i > .$$

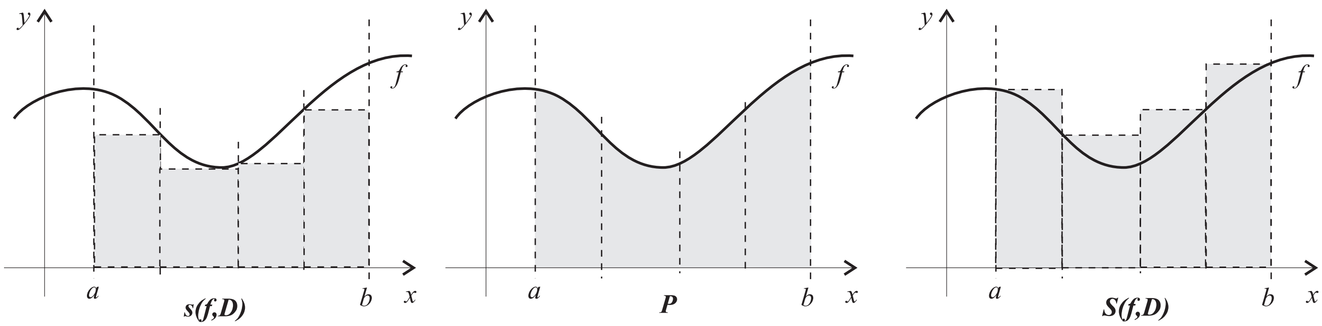
Potom číslo

$$s(f, D) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x_i$$

nazveme *dolním (Riemannovým) součtem funkce f při dělení D* a číslo

$$S(f, D) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i$$

nazveme *horním (Riemannovým) součtem funkce f při dělení D.*



Věta 8.1 *Nechť f je omezená na intervalu $< a, b >$ a nechť $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(< a, b >)$ jsou libovolná. Potom platí*

$$m \cdot (b - a) \quad \leq \quad s(f, D_1) \quad \leq \quad S(f, D_2) \quad \leq \quad M \cdot (b - a),$$

kde $m = \inf\{f(x);\ x \in < a, b >\}$ a $M = \sup\{f(x);\ x \in < a, b >\}$.

Definice 8.3 Nechť f je omezená na intervalu $< a, b >$. Potom se číslo

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \sup \big\{ s(f, D);\ D \in \mathcal{D}(< a, b >) \big\}$$

nazývá *dolní (Riemannův) integrál funkce f na intervalu* $< a, b >$ a číslo

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, dx = \inf \big\{ S(f, D);\ D \in \mathcal{D}(< a, b >) \big\}$$

nazývá *horní (Riemannův) integrál funkce f na intervalu* $< a, b >$.

Definice 8.4 Nechť f je omezená na intervalu $< a, b >$. Jestliže

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \overline{\int_a^b} f(x)\, dx,$$

říkáme, že funkce f je *Riemannovsky integrovatelná na* $< a, b >$, značíme $f \in \mathcal{R}(< a, b >)$. Společnou hodnotu dolního a horního Riemannova integrálu nazýváme *Riemannovým integrálem funkce f na intervalu* $< a, b >$, značíme

$$\int_a^b f(x)\, dx \qquad \Big(\text{případně } (\mathcal{R}) \int_a^b f(x)\, dx \Big).$$

8.2 Podmínky integrovatelnosti

Věta 8.2 (Nutná a postačující podmínka) *Nechť f je omezená na intervalu $< a, b >$. Potom*

$$f \in \mathcal{R}(< a, b >) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \, \exists D \in \mathcal{D}(< a, b >) \, : \, 0 < S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon$$

Věta 8.3 *Nechť f je monotonní na intervalu $< a, b >$. Pak $f \in \mathcal{R}(< a, b >)$.*

Věta 8.4 *Nechť f je spojitá na intervalu $< a, b >$. Pak $f \in \mathcal{R}(< a, b >)$.*

Věta 8.5 *Nechť f je omezená na intervalu $< a, b >$ a nechť má na $< a, b >$ jen konečně mnoho bodů nespojitosti. Pak $f \in \mathcal{R}(< a, b >)$.*

Věta 8.6 *Nechť f a g jsou omezené na intervalu $< a, b >$ a nechť $f \neq g$ jen v konečně mnoha bodech z $< a, b >$. Potom*

$$f \in \mathcal{R}(< a, b >) \quad \Longleftrightarrow \quad g \in \mathcal{R}(< a, b >)$$

8.3 Vlastnosti $\mathcal{R}$-integrálu

a) v závislosti na funkci, kterou integrujeme

Věta 8.7 *Nechť $f \in \mathcal{R}(< a, b >)$ a nechť čísla $k, K \in \mathbb{R}$ jsou taková, že $k \leq f(x) \leq K \; \forall x \in < a, b >$. Potom platí*

$$k \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq K \cdot (b - a)$$

Věta 8.8 *Nechť $f, g \in \mathcal{R}(< a, b >)$. Potom také $f + g \in \mathcal{R}(< a, b >)$ a platí*

$$\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big) dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx$$

Věta 8.9 *Nechť $f \in \mathcal{R}(< a, b >)$ a $c \in \mathbb{R}$. Potom $c \cdot f \in \mathcal{R}(< a, b >)$ a platí*

$$\int_a^b c \cdot f(x) \, dx = c \cdot \int_a^b f(x) \, dx$$

Věta 8.10 *Nechť $f, g \in \mathcal{R}(< a, b >)$ a nechť $f(x) \leq g(x) \; \forall x \in < a, b >$. Potom*

$$\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx$$

Věta 8.11 *Nechť $f \in \mathcal{R}(< a, b >)$. Potom $|f| \in \mathcal{R}(< a, b >)$ a platí*

$$\Big| \int_a^b f(x) \, dx \Big| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx$$

Věta 8.12 *Nechť $f, g \in \mathcal{R}(< a, b >)$. Potom $f \cdot g \in \mathcal{R}(< a, b >)$.*

Věta 8.13 *Nechť $f, g \in \mathcal{R}(< a, b >)$ a nechť $\exists c \in \mathbb{R}$, $c > 0$ tak, že $g(x) \geq c$ na $< a, b >$. Potom $\frac{f}{g} \in \mathcal{R}(< a, b >)$.*

b) v závislosti na intervalu, přes který integrujeme

Věta 8.14 *Nechť* $a < c < b,\ a, b, c \in \mathbb{R}$, *nechť* $f \in \mathcal{R}(< a, c >)$ *a* $f \in \mathcal{R}(< c, b >)$. *Potom* $f \in \mathcal{R}(< a, b >)$ *a platí*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)dx$$

Věta 8.15 *Nechť* $f \in \mathcal{R}(< a, b >)$ *a* $< c, d > \subset < a, b >$. *Potom* $f \in \mathcal{R}(< c, d >)$.

Definice 8.5 (Doplnění definice $\mathcal{R}$-integrálu) Nechť f je definována na uzavřeném intervalu s krajními body a a b.

- Je-li $a < b$ a $f \in \mathcal{R}(< a, b >)$, pak $\int_a^b f(x)\,dx$ je definován ve smyslu výše uvedené definice.
- Je-li $a = b$, pak definujeme
$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$
- Je-li $b < a$ a $f \in \mathcal{R}(< b, a >)$, pak definujeme
$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

8.4 Výpočet $\mathcal{R}$-integrálu

Věta 8.16 (Newton-Leibnizův vzorec) *Nechť* $f \in \mathcal{R}(< a, b >)$ *a* F *je primitivní k* f *na* $< a, b >$ *a nechť* F *je spojitá na* $< a, b >$. *Potom platí*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \equiv \big[\,F(x)\,\big]_a^b$$

Věta 8.17 (Metoda per partes) *Nechť funkce* u *a* v *mají derivace na intervalu* $< a, b >$ *a nechť* $u', v' \in \mathcal{R}(< a, b >)$. *Potom*

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = \underbrace{\big[\,u(x)v(x)\,\big]_a^b}_{u(b)v(b)-u(a)v(a)} - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$$

Věta 8.18 (Substituční metoda) *Nechť má funkce* $t = \varphi(x)$ *spojitou derivaci na* $< a, b >$ *a nechť* f *je spojitá na* H_φ *(obor hodnot funkce* φ*). Potom*

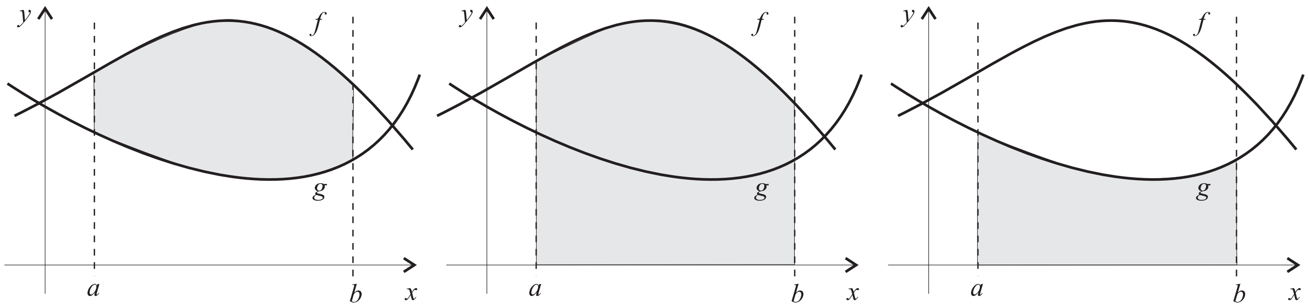
$$\int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt$$

Poznámka: Při změně proměnné (substituci) musíme upravit i integrační meze!!!

8.5 Aplikace určitého integrálu

a) obsah útvaru v rovině

Mějme dvě integrovatelné funkce f a g na intervalu $< a, b >$.
Nechť $f(x) \geq g(x)\ \forall x \in < a, b >$.

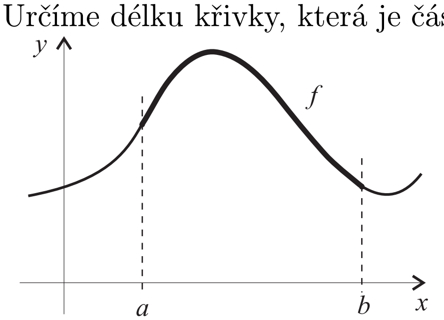


plocha mezi f a g	=	plocha pod f	−	plocha pod g
$\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx$	=	$\int_a^b f(x)\,dx$	−	$\int_a^b g(x)\,dx$

Poznámka: Pokud je obrazec složitější, rozdělíme ho na vhodné části, jejichž plochu umíme určit pomocí výše uvedeného principu.

b) délka křivky

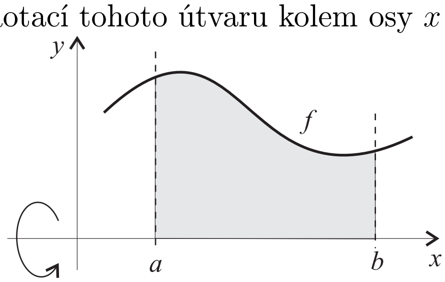
Určíme délku křivky, která je částí grafu spojitě diferencovatelné funkce f na intervalu $< a, b >$.



$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

c) objem rotačního tělesa

Uvažujme rovinný útvar omezený grafem nezáporné spojitá funkce f na intervalu $< a, b >$ a osou x. Rotací tohoto útvaru kolem osy x vznikne rotační těleso, jehož objem je dán vztahem



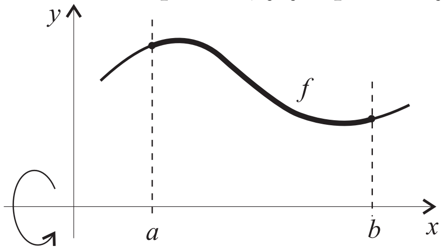
$$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)\,dx$$

Poznámka: Při rotaci kolem osy y je objem vzniklého rotačního tělesa dán vztahem

$$V = 2\pi \cdot \int_a^b x \cdot f(x)\,dx$$

d) obsah rotační plochy

Nechť f je spojitě diferencovatelná funkce na intervalu $< a, b >$. Rotací grafu funkce f na $< a, b >$ vznikne rotační plocha, jejíž povrch je dán vztahem



$$S = 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Poznámka: Při rotaci kolem osy y je povrch vzniklé rotační plochy dán vztahem

$$S = 2\pi \cdot \int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$