Funkce zadaná implicitně

Příklad 1. Najděte body křivky $x^2 + 2xy - y^2 - 8 = 0$, v nichž nejsou splněny předpoklady Věty o existenci implicitní funkce
[(2,2) a (-2,-2)]

Příklad 2. Určete první a druhou derivaci funkce $y = f(x)$ zadané implicitně rovnicí:

a) $x = y - 4\sin y$ $\qquad [y' = \frac{1}{1-4\cos y},\ y'' = -\frac{4\sin y}{(1-4\cos y)^3}]$

b) $x - \ln y - y^2 = 0$ $\qquad [y' = \frac{y}{1+2y^2},\ y'' = \frac{y+2y^3-4y^2}{(1+2y^2)^3}]$

c) $\ln\sqrt{x^2+y^2} - \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ $\qquad [y' = \frac{x+y}{x-y},\ y'' = \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}]$

d) $1 + xy - \ln\left(e^{xy} + e^{-xy}\right) = 0$ $\qquad [y' = -\frac{y}{x},\ y'' = \frac{2y}{x^2}]$

Příklad 3. Rozhodněte, zda funkce $y = f(x)$ zadaná implicitně rovnicí $x^4 - xy + y^4 = 1$ je pro $x = 0$ a $y = 1$ rostoucí/klesající a konvexní/konkávní.
[Je rostoucí a konkávní.]

Příklad 4. Funkce $y = f(x)$ je implicitně zadaná rovnicí $x^3 + y^3 - 6xy = 0$. Nalezněte takové x, aby platilo $f'(x) = 0$.
[$2^{\frac{4}{3}}$]

Příklad 5. Určete lokální extrémy funkce $y = f(x)$ zadané implicitně rovnicí $x^4 - +y^3 + 2x^2y + 2 = 0$.
[maximum pro $x = 1$ a $x = -1$]