IV. Implicitní funkce

Funkce jedné proměnné může být zadána explicitně ve tvaru $y = f(x)$ nebo implicitně ve tvaru $F(x, y) = 0$, kde F je funkce dvou proměnných.

V některých případech rovnice $F(x, y) = 0$ definuje jednoznačně funkci $y = f(x)$, jindy ne.

Věta 0.1 (O implicitní funkci) *Nechť F je funkce dvou proměnných. Nechť dále*

- *F má na nějakém okolí bodu (x_0, y_0) spojité parciální derivace F'_x a F'_y*
- $F(x_0, y_0) = 0$
- $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$

Potom existuje okolí $\mathcal{U}_\delta(x_0) \subset \mathbb{R}$ a existuje právě jedna funkce f definovaná na tomto okolí taková, že platí:

- $f(x_0) = y_0$
- *$F(x, f(x)) = 0$ pro všechna $x \in \mathcal{U}_\delta(x_0)$*
- *na $\mathcal{U}_\delta(x_0)$ má f spojitou derivaci, pro kterou platí*

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}, \quad \text{kde } y = f(x).$$

Definice 0.1 O funkci f, jejíž existence je zaručena předchozí větou říkáme, že *je určena jednoznačně rovnicí $F(x, y) = 0$ a bodem (x_0, y_0)* (tj. vlastně podmínkou $f(x_0) = y_0$). Stručně hovoříme o *implicitní funkci.*

Poznámka: Kdybychom ve větě místo $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ předpokládali $F'_x(x_0, y_0) \neq 0$, věta by opět platila, pouze bychom zaměnili proměnné x a y a dostali bychom funkci $x = g(y)$.

Derivaci implicitně zadané funkce můžeme počítat podle vzorce a nebo i přímo tak, že obě strany rovnice derivujeme podle x, přičemž y považujeme za funkci proměnné x a derivujeme ji užitím věty o derivaci složené funkce.

Některé funkce nelze vyjádřit explicitně a přesto potřebujeme znát jejich vlastnosti $\Rightarrow$ funkce dané implicitně lze vyšetřovat podobně jako funkce dané explicitně.

Poznámka: Implicitně ve tvaru $F(x, y, z) = 0$ a jistým bodem může být zadána i funkce dvou proměnných $z = f(x, y)$. Pro existenci explicitního tvaru platí obdobná věta.