III. Funkce jedné proměnné

Obsah

1 Definice a základní vlastnosti

1.1 Základní pojmy

S funkcemi se setkáváme všude tam, kde zkoumáme závislost mezi dvěma nebo více veličinami, přičemž tyto veličiny se obecně mění a jsou vázány jistým vztahem. Tento vztah jednoznačně určuje hodnotu jedné (nebo více) veličiny v zavislosti na zbylé (zbylých) veličině.

Funkce se užívají především v technických, přírodních, ekonomických i jiných (např. humanitních) vědách, občas i v bežném životě.

My se budem zabývat speciálním typem funkcí a to reálnými funkcemi jedné reálné proměnné.

Definice 1.1 Zobrazení $f$množiny $A \subset \mathbb{R}$ do množiny $\mathbb{R}$ (zapisujeme $f : A \to \mathbb{R}$) se nazývá *reálná funkce jedné reálné proměnné* (zkráceně budeme říkat jen *funkce*).

Číslo $x \in A$ se nazývá *argument funkce f* nebo *nezávisle proměnná*. Číslo $y \in \mathbb{R}$ se nazývá *závisle proměnná*. Skutečnost, že $(x, y) \in f$, $x \in A$, zapisujeme jako $y = f(x)$, $x \in A$; číslo $f(x)$ se nazývá *hodnota funkce fv bodě $x \in A$* (*funkční hodnota v bodě x*).

Množina $A \subset \mathbb{R}$ se nazývá *definiční obor funkce f* a značíme ho $D(f)$ nebo D_f. Množina $\{y \in \mathbb{R}; y = f(x), x \in A\}$ (tj. množina všech funkčních hodnot funkce f) se nazývá *obor hodnot funkce f* a značíme ho $H(f)$ nebo H_f.

Poznámka: Pro označení funkcí obvykle používáme písmena $f, g, h, F, G, H, \dots$ nebo také písmena řecké abecedy, z nich nejčastěji φ a ψ.

Poznámka: Funkcí $f$rozumíme předpis (pravidlo, tzv. funkční předpis), kterým je každé hodnotě nezávisle proměnné $x \in D_f \subset \mathbb{R}$ přiřazena právě jedna hodnota $y = f(x) \in H_f \subset \mathbb{R}$.

Definice 1.2 *Grafem funkce f*nazýváme množinu

$$\{(x, f(x)); x \in D_f\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Značíme ji $G(f)$ nebo G_f nebo graf f.

Poznámka: Grafem funkce je vlastně křivka v rovině o rovnici $y = f(x)$, kde $x \in D_f$.

Reálnou rovinou $\mathbb{R}^2$ rozumíme kartézský součin $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ spolu se zavedenou *kartézskou soustavou souřadnic* (počátek a dvě na sebe kolmé soouřadnicové osy x a y). Každý bod roviny je jednoznačně určen svými souřadnicemi a naopak.

Vzdáleností bodů M a N v rovině budeme vždy (pokud nebude řečeno jinak) rozumět tzv. *eukleidovskou vzdálenost* $d(M, N)$ danou vztahem

$$d(M, N) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2},$$

kde $M = (x_1, y_1)$ a $N = (x_2, y_2)$. Rovina $\mathbb{R}^2$ se proto často nazývá *eukleidovskou rovinou.*

1.2 Zadávání funkce

a) *analyticky*, tj. vzorcem (funkčním předpisem; rovnicí nebo soustavou rovnic)

1. *explicitně*, tj rovnicí $y = f(x)$ (kde $f(x)$ je výraz v proměnné x) a definičním oborem D_f
2. *implicitně*, tj. rovnicí $F(x, y) = 0$ a podmínkami pro x a y
3. *parametricky*, tj soustavou rovnic
$$\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned}$$
   kde φ a ψ jsou funkce nezávisle proměnné t mající stejný definiční obor
4. místo kartézských souřadnic (x, y) použijeme *polární souřadnice* r a φ bodu v rovině (r je vzdálenost bodu od počátku a φ je orientovaný úhel mezi kladným směrem osy x a průvodičem daného bodu). Funkci máme potom ve tvaru $r = g(\varphi)$ a dodáváme podmínky (definiční obor) pro r

b) *tabulkou*, tj zadání výčtem funkčních hodnot $(x_i, f(x_i))$, $i = 1, \dots, n$. Pokud není definičním oborem konečná množina, tak není zadání funkce mimo body $\{x_, \dots, x_n\}$ přesné a určuje se pouze přibližně (třeba interpolací). Zadání funkce tabulkou se používá zpravidla při experimentálních měřeních.

c) *grafem* - používá se především v aplikacích a je nejméně vhodný pro další matematické zpracování, protože hodnoty odečítáme z grafu pouze přibližně. Tento způsob zadání dává názornou představu o průběhu funkce.

d) kombinací výše uvedených možností

Poznámka: V případech a)2., a)3. a a)4. musíme přidat vždy podmínky na funkce F, φ, ψ a g tak, aby tyto předpisy skutečně určovaly funkci. Například rovnice $x^2 + y^2 - 1 = 0$ (tj. typ $F(x, y) = 0$) neurčuje funkci, ale pokud přidáme podmínku $y \geq 0$, dostaneme předpis pro funkci.

Analytický způsob zadávání funkce je pro matematické účely nejvhodnější a proto se také užívá nejčastěji.

Příklad: Funkce lze zadat více způsoby neboi různě při stejném způsobu:

- explicitně $\quad f(x) = |x|,\ x \in \mathbb{R}$ nebo $f(x) = \sqrt{x^2},\ x \in \mathbb{R}$ nebo $f(x) = \begin{cases} x & \text{pro}\, x \geq 0 \\ -x & \text{pro}\, x < 0 \end{cases}$
- implicitně $\quad y - |x| = 0,\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}_0^+$
- parametricky
$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= |t| \end{aligned}$$
- grafem
- v polárních souřadnicích $\quad r \in \mathbb{R},\ \varphi \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\}$
- tabulkou (neúplné zadání)

1.3 Globální vlastnosti funkcí

Definice 1.3 Funkce f se nazývá *periodická*, jestliže existuje číslo $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ takové, že

a) $x \in D_f \quad \Longleftrightarrow \quad x + p \in D_f$

b) $f(x + p) = f(x) \quad$ pro každé $x \in D_f$.

Číslo p se nazývá *perioda* funkce f. Nejmenší kladná perioda funkce f se nazývá *primitivní perioda* funce f.

Poznámka: Je-li p perioda funkce f, pak každé číslo $k \cdot p$, kde $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ je také periodou funkce f.

Při zkoumání vlastností periodické funkce se stačí omezit jen na libovolný polouzavřený interval délky p. Takový interval se nazývá *zákkladní interval periodicity* této funkce.

Definice 1.4 Funkce f se nazývá *sudá* (*lichá*), jestliže

a) $x \in D_f \quad \Longleftrightarrow \quad -x \in D_f$

b) $f(-x) = f(x) \quad$ pro každé $x \in D_f \quad (f(-x) = -f(x) \quad$ pro každé $x \in D_f)$.

Poznámka: Definice požaduje, aby definiční obor sudé i liché funkce by symetrický kolem počátku. Graf sudé funkce je osově souměrný kolem osy y a graf liché funkce je středově souměrný kolem počátku soustavy souřadnic.

Uvažujme množinu $M \subset D_f$ a $M \neq \emptyset$.

Definice 1.5 Funkce f se nazývá *prostá na množině* M, jestliže pro všechny dvojice $x_1, x_2 \in M$ platí

$$x_1 \neq x_2 \qquad \Longrightarrow \qquad f(x_1) \neq f(x_2).$$

Poznámka: Požadavek prostoty lze ekvivalentně vyjádřit ve tvaru

$$f(x_1) = f(x_2) \qquad \Longrightarrow \qquad x_1 = x_2.$$

Jestliže je f prostá na množině M, potom každá rovnoběžka s osou x protíná graf funkce f nejvýše v jednom bodě.

Definice 1.6 Jestliže pro všechna $x_1, x_2 \in M$, $x_1 < x_2$ platí $\begin{pmatrix} f(x_1) < f(x_2) \\ f(x_1) > f(x_2) \\ f(x_1) \geq f(x_2) \\ f(x_1) \leq f(x_2) \end{pmatrix}$, pak se funkce f se nazývá $\begin{pmatrix} \textit{rostoucí} \\ \textit{klesající} \\ \textit{nerostoucí} \\ \textit{neklesající} \end{pmatrix}$ *na množině* M.

Definice 1.7 Funkce, která je rostoucí, klesající, nerostoucí nebo neklesající na množině M, se nazývá *monotonní na množině* M. Funkce, která je rostoucí nebo klesající na množině M, se nazývá *ryze monotonní na množině* M.

Definice 1.8 Funkce f se nazývá *konstantní na* M, jestliže $\forall\, x_1, x_2 \in M$ platí $f(x_1) = f(x_2)$.

Poznámka: Je-li f konstantní na M, pak existuje konstanta $a \in \mathbb{R}$ tak, že $f(x) = a \ \forall x \in M$.

Definice 1.9 Funkce f definovaná předpisem $f(x) = 0 \ \forall\, x \in M$, se nazývá *nulová na* M.

Věta 1.1 *Funkce, která je ryze monotonní na* M*, je prostá na* M*.*

Věta 1.2 *Je-li funkce* f *rostoucí (resp. klesající) na množině* M*, pak je rostoucí na každé podmnožině množiny* M *obsahující alespoň dva různé body.*

Definice 1.10 Funkce f se nazývá

- *omezená shora na* M, jestliže $\exists k \in \mathbb{R}$ tak, že $f(x) \leq k \quad \forall x \in M$.
- *omezená zdola na* M, jestliže $\exists l \in \mathbb{R}$ tak, že $f(x) \geq l \quad \forall x \in M$.
- *omezená na* M, jestliže je na M omezená shora i zdola zároveň.

Věta 1.3 *Funkce* f *je omezená na* M *právě tehdy, když* $\exists K \in \mathbb{R}^+$ *tak, že* $|f(x)| \leq K \quad \forall x \in M$*, tj. právě tehdy, když* $-K \leq f(x) \leq K \quad \forall x \in M$*.*

Poznámka: Některé typy funkcí omezených shora nebo zdola nulou mají speciální názvy:

- $f(x) < 0 \quad \forall x \in M$ ... funkce záporná na M
- $f(x) \leq 0 \quad \forall x \in M$ ... funkce nekladná na M
- $f(x) > 0 \quad \forall x \in M$ ... funkce kladná na M
- $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in M$ ... funkce nezáporná na M

Definice 1.11 Nechť $c \in M$. Číslo $f(c)$ se nazývá *globálním maximem* (resp. *globálním minimem*) *funkce f na M*, jestliže

$$f(x) \leq f(c) \quad \forall x \in M,$$
$$(\text{resp. } f(x) \geq f(c) \quad \forall x \in M).$$

Značíme

$$f(c) = \max_{x \in M} f(x) = \max\{f(x);\, x \in M\},$$
$$(\text{resp. } f(c) = \min_{x \in M} f(x) = \min\{f(x);\, x \in M\}).$$

Globální maxima a globální minima funkce f na M nazýváme souhrnně *globálními* (*absolutními*) *extrémy funkce f na M*.

1.4 Algebraické operace s funkcemi

Definice 1.12 Říkáme, že funkce f a g si jsou *rovny na M*, jestliže $f(x) = g(x) \quad \forall x \in M$. Jestliže navíc $M = D_f = D_g$, říkáme, že f a g si jsou *rovny*. Značíme $f = g$ (na M).

Definice 1.13 Nechť $M = D_f \cap D_g$. Potom

- *součtem funkcí f a g* nazveme funkci $f + g$ takovou, že $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in M$;
- *rozdílem funkcí f a g* nazveme funkci $f - g$ takovou, že $(f-g)(x) = f(x) - g(x) \quad \forall x \in M$;
- *součinem funkcí f a g* nazveme funkci $f \cdot g$ takovou, že $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad \forall x \in M$;
- *podílem funkcí f a g* (v tomto pořadí) nazveme funkci $\frac{f}{g}$ takovou, že

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \forall x \in M \setminus \{x \in D_g;\, g(x) = 0\}.$$

- *absolutní hodnotou funkce f* nazveme funkci $|f|$ takovou, že $|f|(x) = |f(x)| \quad \forall x \in D_f$;

1.5 Složená funkce

Definice 1.14 Nechť funkce $y = f(u)$ má definiční obor D_f a nechť funkce $u = g(x)$ má definiční obor D_g. Jestliže $H_g \subset D_f$, můžeme proměnnou y považovat za závislou na proměnné x, tj. za funkci $y = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$ s definičním oborem D_g. Funkce $f \circ g$ se nazývá *funkce složená z funkcí f a g* (v tomto pořadí!). Funkce f se nazývá *vnější funkce* a g se nazývá *vnitřní funkce* složené funkce $f \circ g$.

1.6 Inverzní funkce

Definice 1.15 Nechť je funkce f prostá na D_f. Potom funkci f^{-1} nazýváme *funkcí inverzní k funkci f*, jestliže každému $y \in H_f$ přiřazuje číslo $x \in D_f$ tak, že $y = f(x)$.

Poznámka: Předpoklad, aby f byla prostá, je pro existenci inverzní funkce nezbytný (tzv. nutná podmínka existence inverzní funkce). Pro f a f^{-1} platí, že $D_f = H_{f^{-1}}$ a $H_f = D_{f^{-1}}$.

2 Elementární funkce

Existuje určitá skupina funkcí, které se nazývají *základní elementární funkce*. Jsou to funkce konstantní, mocninné, exponenciální a llogaritmické, goniometrické a cyklometrické, (hyperbolické a hyperbolometrické).

Definice 2.1 Funkce se nazývá *elementární funkce*, jestliže ji lze vytvořit ze základních elementárních funkcí pouze pomocí konečného počtu algebraických operací nebo skládání.

???? Základní elementární funkce:....

Rozdělení elementárních funkcí:

$$\text{elementární}\begin{cases}\text{transcendentní}\\[2ex] \text{algebraické} & \begin{cases}\text{iracionální}\\[1ex] \text{racionální} & \begin{cases}\text{celé racionální}\\ \text{lomené racionální} & \begin{cases}\text{ryze lomené racionální}\\ \text{neryze lomené racionální}\end{cases}\end{cases}\end{cases}\end{cases}$$

Definice 2.2 Elementární funkce se nazývá *algebraická*, jestliže je vytvořena pouze z konstantní funkce a mocninné funkce x^α, $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

Definice 2.3 Algebraické funkce, které jsou vytvořné pouze pomocí algebraických operací (tj. bez skládání), se nazývají *racionální*. Ostatní algebraické funkce se nazývají *iracionální*.

Definice 2.4 *Celou racionální funkcí (polynomem stupně n, algebraickým mnohočlenem stupně n)* nazýváme funkci tvaru $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, $x \in \mathbb{R}$, kde číslo $n \in \mathbb{N}_0$ se nazývá *stupeň polynomu P* a konstanty $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ se nazývají *koeficienty polynomu.* Polynomy stupně n a stupňů nižších nazýváme *polynomy stupně nejvýše n.*

Definice 2.5 *Kořenem polynomu P* se nazývá takové reálné nebo komplexní číslo α, že $P(\alpha) = 0$.

Věta 2.1 (Základní věta algebry) *Každý polynom stupně $n \geq 1$ má alepoň jeden kořen.*

Věta 2.2 *Má-li polynom P stupně $n \geq 1$ kořen α, potom existuje polymon Q stupně $n-1$ takový, že $P(x) = (x-\alpha)\cdot Q(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.*

Definice 2.6 Výraz $(x - \alpha)$ z předchozí Věty se nazývá *kořenový činitel polynomu P*. Kořen α polynomu P stupně n se nazývá *k-násobný kořen polynomu P* (kde $k \leq n$), jestliže existuje polynom Q stupně $n-k$ tak, že $P(x) = (x-\alpha)^k \cdot Q(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ a přitom α není kořenem polynomu Q.

Věta 2.3 (O rozkladu polynomu) *Každý polynom P stupně n lze jednoznačně rozložit na součin lineárních a kvadratických členů s reálnými koeficienty*

$$P(x) = a_n(x-\alpha_1)^{k_1}\cdots(x-\alpha_j)^{k_j}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}\cdots(x^2+p_ix+q_i)^{s_i},$$

kde

- $k_1 + k_2 + \cdots + k_j + 2s_1 + 2s_2 + \cdots + 2s_i = n$;
- $\alpha_1, \ldots, \alpha_j$ *jsou všechny navzájem různé reálné kořeny polynomu P a* $k_1, \ldots, k_j$ *jsou jejich násobnosti;*
- *kvadratické členy nemají reálné kořeny, ale mají dvojici komplexně sdružených kořenů s násobnostmi $s_1, \ldots, s_i$.*

Definice 2.7 *Lomenou racionální funkcí* nazýváme algebraickou funkci typu

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R};\, Q(x) = 0\},$$

kde P a Q jsou polynomy, přičemž Q je stupně alespoň 1. Jestliže $stP < stQ$, R se nazývá *ryze lomená racionální funkce*; jinak se R nazývá *neryze lomená racionální funkce.*

Věta 2.4 (Rozklad na parciální zlomky) *Nechť* $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ *je ryze lomená racionální funkce, jejíž čitatel a jmenovatel nemají stejné kořeny. Nechť*

$$Q(x) = a_n(x-\alpha_1)^{k_1}\cdots(x-\alpha_j)^{k_j}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}\cdots(x^2+p_ix+q_i)^{s_i}.$$

Potom existují (jednoznačně určená) reálná čísla $A_{11},\dots A_{1k_1},\dots,A_{j1},\dots A_{jk_j}$, $B_{11},\dots B_{1s_1}$, $\dots$, B_{i1}, $\dots B_{is_i}, C_{11}$, $\dots C_{1s_1},\dots,C_{i1},\dots C_{is_i}$ *taková, že*

$$\begin{aligned}
R(X) &= \underbrace{\frac{A_{11}}{x-\alpha_1}+\frac{A_{12}}{(x-\alpha_1)2}+\cdots+\frac{A_{1k_1}}{(x-\alpha_1)^{k_1}}}+\cdots+\underbrace{\frac{A_{j1}}{x-\alpha_j}+\cdots+\frac{A_{jk_j}}{(x-\alpha_j)^{k_j}}}+\\
&+ \underbrace{\frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{B_{12}x+C_{12}}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+\cdots+\frac{B_{1s_1}x+C_{1s_1 1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}}}+\cdots+\\
&+ \underbrace{\frac{B_{i1}x+C_{i1}}{x^2+p_ix+q_i}+\cdots+\frac{B_{is_i}x+C_{is_i}}{(x^2+p_ix+q_i)^{s_i}}}.
\end{aligned}$$