II. Funkce dvou proměnných

Obsah

1 Základní pojmy a vlastnosti

Déle budeme označením $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$) rozumět dvoj- (resp. troj-) rozměrný reálný prostor s eukleidovskou metrikou.

Definice 1.1 Zobrazení f množiny $A \subset \mathbb{R}^2$ do množiny $\mathbb{R}$ (zapisujeme $f : A \to \mathbb{R}$) se nazývá *reálná funkce dvou reálných proměnných* (zkráceně budeme říkat jen *funkce dvou proměnných*).

Čísla x, y se nazývají *nezávisle proměnné*. Číslo $f(x, y)$ se nazývá *hodnota funkce f v bodě* $(x, y) \in A$ nebo *funkční hodnota funkce f v bodě* (x, y).

Množina $A \subset \mathbb{R}$ se nazývá *definiční obor funkce* f a značíme ho $D(f)$ nebo D_f. Množina $\{z \in \mathbb{R}; z = f(x, y), (x, y) \in A\}$ (tj. množina všech funkčních hodnot funkce f) se nazývá *obor hodnot funkce* f a značíme ho $H(f)$ nebo H_f.

Pokud nebude řečeno jinak, tak od této chvíle budeme pod pojmem "funkce" rozumět funkci dvou proměnných.

Poznámka: Funkce f je vlastně předpis (pravidlo, tzv. funkční předpis), kterým je každé uspořádané dvojici $(x, y) \in D_f \subset \mathbb{R}^2$ přiřazena právě jedna hodnota $z = f(x, y) \in H_f \subset \mathbb{R}$.

Definice 1.2 *Grafem funkce f* nazýváme množinu

$$\{(x, y, f(x, y)); (x, y) \in D_f\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Značíme ji $G(f)$ nebo G_f nebo graf f.

Definice 1.3 *Vrstevnicí funkce f o úrovni c* nazýváme množinu $\{(x, y) \in D_f; f(x, y) = c\}$, tj. křivku v rovině (xy), která vznikne jako pravoúhlý průmět průsečnice grafu funkce f a roviny $z = c$ rovnoběžné s rovinou (xy) (tj. vrstevnice funkce f o úrovni c je množina všech bodů z D_f, v nichž má funkce f funkční hodnotu c).

Stejně jako u funkce jedné proměnné je i funkce dvou proměnných určena svým předpisem a definičním oborem. Pokud není definiční obor zadán, musíme ho určit a to jako množinu všech bodů $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, pro něž má funkční předpis smysl.

Poznámka: $D_f \subset \mathbb{R}^2$, $H_f \subset \mathbb{R}$ a graf $f \subset \mathbb{R}^3$!

Možnosti zadání funkce dvou proměnných jsou obdobné jako u funkce jedné proměnné, tj. funkci dvou proměnných lze zadat analyticky (explicitně, implicitně nebo parametricky), výčtem vybraných funkčních hodnot, grafem nebo kombinací výše uvedených možností.

Analytický způsob zadávání funkce je pro matematické účely nejvhodnější a proto se také užívá nejčastěji.

1.1 Vlastnosti funkcí

Pojmy jako omezenost, maximum, minimum, supremum a infimum se definjí obdobně jako u funkcí jedné proměnné a stejně je tomu i s algebraickými operacemi.

Definice 1.4 Funkce f se nazývá *konstantní na* $M \subset \mathbb{R}^2$, jestliže $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in M$ platí $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$, tj. jestliže existuje konstanta $a \in \mathbb{R}$ tak, že $f(x, y) = a$ pro všechna $(x, y) \in M$. Funkce f definovaná předpisem $f(x, y) = 0$ pro všechna $(x, y) \in M$, se nazývá *nulová na* M.

Definice 1.5 Funkce f se nazývá

- *omezená shora na* M, jestliže $\exists k \in \mathbb{R}$ tak, že $f(x, y) \leq k \quad \forall (x, y) \in M$.
- *omezená zdola na* M, jestliže $\exists l \in \mathbb{R}$ tak, že $f(x, y) \geq l \quad \forall (x, y) \in M$.
- *omezená na* M, jestliže je na M omezená shora i zdola zároveň.

Věta 1.1 *Funkce f je omezená na $M \subset \mathbb{R}^2$ právě tehdy, když $\exists K \in \mathbb{R}^+$ tak, že $|f(x,y)| \leq K$ pro všechna $(x,y) \in M$, tj. právě tehdy, když $-K \leq f(x) \leq K \quad \forall (x,y) \in M$.*

Definice 1.6 Nechť $(x_0, y_0) \in M \subset \mathbb{R}^2$. Číslo $f(x_0, y_0)$ se nazývá *globálním maximem* (resp. *globálním minimem*) *funkce f na M*, jestliže

$$f(x,y) \leq f(x_0, y_0) \quad \forall (x,y) \in M,$$

$$(\text{resp. } f(x,y) \geq f(x_0, y_0) \quad \forall (x,y) \in M).$$

Značíme

$$f(x_0, y_0) = \max_{(x,y) \in M} f(x,y) = \max\{f(x,y);\, (x,y) \in M\},$$

$$(\text{resp. } f(x_0, y_0) = \min_{(x,y) \in M} f(x,y) = \min\{f(x,y);\, (x,y) \in M\}).$$

Globální maxima a globální minima funkce f na M nazýváme souhrnně *globálními* (*absolutními*) *extrémy funkce f na M*.

1.2 Algebraické operace s funkcemi

Definice 1.7 Říkáme, že funkce f a g si jsou *rovny na M*, jestliže $f(x,y) = g(x,y) \quad \forall (x,y) \in M$. Jestliže navíc $M = D_f = D_g$, říkáme, že f a g si jsou *rovny*. Značíme $f = g$ (na M).

Definice 1.8 Nechť $M = D_f \cap D_g$. Potom

- *součtem funkcí f a g* nazveme funkci $f+g$ takovou, že $(f+g)(x,y) = f(x,y) + g(x,y) \quad \forall (x,y) \in M$;
- *rozdílem funkcí f a g* nazveme funkci $f-g$ takovou, že $(f-g)(x,y) = f(x,y) - g(x,y) \quad \forall (x,y) \in M$;
- *součinem funkcí f a g* nazveme funkci $f \cdot g$ takovou, že $(f \cdot g)(x,y) = f(x,y) \cdot g(x,y) \quad \forall (x,y) \in M$;
- *podílem funkcí f a g* (v tomto pořadí) nazveme funkci $\frac{f}{g}$ takovou, že

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x,y) = \frac{f(x,y)}{g(x,y)} \quad \forall (x,y) \in M \setminus \{(x,y) \in D_g;\, g(x,y) = 0\}.$$

- *absolutní hodnotou funkce f* nazveme funkci $|f|$ takovou, že $|f|(x,y) = |f(x,y)| \quad \forall (x,y) \in D_f$;

1.3 Elementární funkce

Definice 1.9 Nechť jsou dány funkce f, g a h s definičními obory D_f, D_g a D_h. Jestliže pro všechna $(x,y) \in M \subset D_g \cap D_h$ platí, že $(g(x,y), h(x,y)) \in D_f$, pak se funkce F definovaná na množině M předpisem

$$F(x,y) = f\left(g(x,y), h(x,y)\right) \quad \forall (x,y) \in M$$

nazývá *funkce složená* z funkcí f, g a h (přitom $D_F = M$ a $H_F \subset H_f$).

Definice 1.10 *Elementární funkcí* dvou proměnných nazýváme funkci, kterou lze vyjádřit pomocí základních elementárních funkcí jednotlivých proměnných užitím konečného počtu algebraických operací a tvoření funkcí složených.

2 Limita funkce

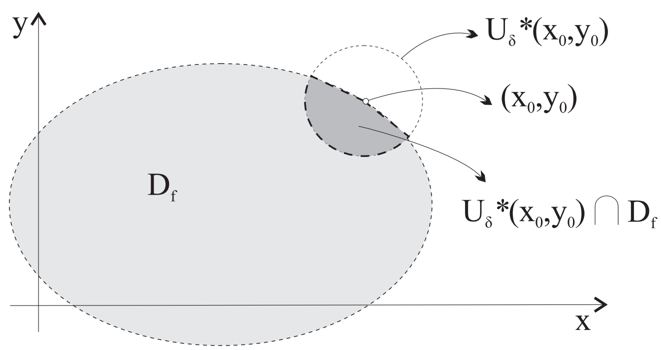
2.1 Definice a základní vlastnosti

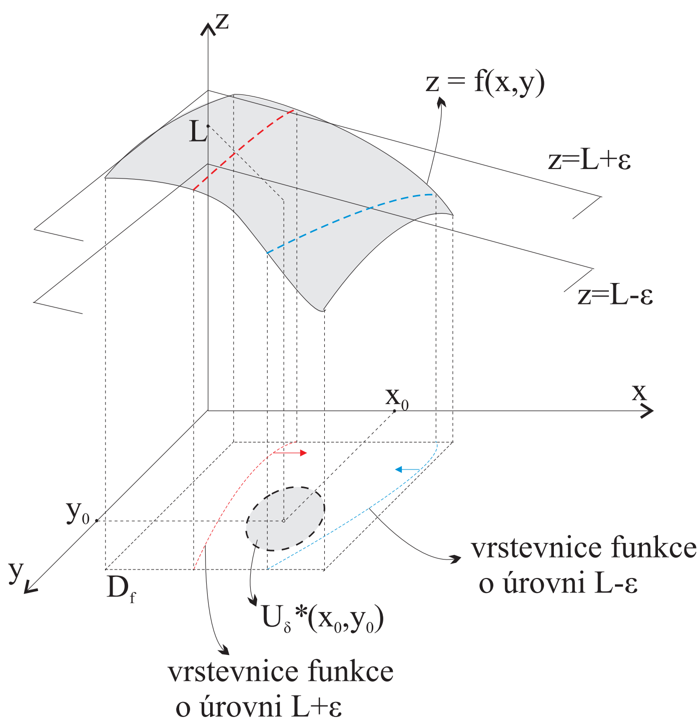
Stejně jako u funkce jedné proměnné nám limita funkce dvou proměnných dává informaci o tom, jak se funkce chová v okolí daného bodu. Tento bod je zpravidla "problematický", tzn. např. že funkce v něm není definovaná nebo je v něm nespojitá.

Definice 2.1 Nechť funkce f je funkcí dvou proměnných x a y, tj. $z = f(x, y)$. Nechť bod $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ je hromadným bodem D_f. Řekneme, že *funkce f má v bodě (x_0, y_0) limitu $L \in \mathbb{R}$*, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall (x, y) \in \mathrm{D}_f \cap \mathcal{U}^*_\delta(x_0, y_0) \, : \, |f(x, y) - L| < \varepsilon$$

O takto definované limitě funkce f v bodě (x_0, y_0) hovoříme jako o *dvojné limitě*.





Výše uvedená definice se dá modifikovat tak, aby zahrnovala všechny typy limit, tj. vlastní/nevlastní limitu ve vlastním/nevlastním bodě:

Definice 2.2 Nechť bod $(x_0, y_0) \in (\mathbb{R}^*)^2$ je hromadným bodem D_f. Řekneme, že *funkce f má v bodě (x_0, y_0) limitu $L \in \mathbb{R}^*$*, jestliže ke každému okolí $\mathcal{U}(L)$ bodu L existuje redukované okolí $\mathcal{U}^*(x_0, y_0)$ bodu (x_0, y_0) takové, že pro každý bod $(x, y) \in \mathcal{U}^*(x_0, y_0) \cap D_f$ platí, že $f(x, y) \in \mathcal{U}(L)$, tj. jestliže

$$\forall \mathcal{U}(L) \;\; \exists \mathcal{U}^*(x_0, y_0) \;\; \forall (x, y) \in \mathcal{U}^*(x_0, y_0) \cap D_f \; : \; f(x, y) \in \mathcal{U}(L)$$

Pro limity funkcí dvou proměnných platí obdobné věty jako v případě funkcí jedné proměnné a jejich důkazy jsou v principu stejné.

Věta 2.1 *Funkce f má v bodě (x_0, y_0) nejvýše jednu limitu.*

Věta 2.2 *Má-li funkce f v bodě (x_0, y_0) vlastní limitu, pak existuje redukované okolí bodu (x_0, y_0) takové, že funkce f je na tomto okolí omezená.*

Věta 2.3 *Nechť $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 0$ a nechť funkce g je omezená v nějakém redukovaném okolí bodu (x_0, y_0). Potom platí*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \big(f(x,y)\cdot g(x,y)\big) = 0.$$

Věta 2.4 (O limitě tří funkcí) *Nechť existuje redukované okolí $\mathcal{U}^*(x_0, y_0)$ bodu (x_0, y_0) takové, že $g(x,y) \le f(x,y) \le h(x,y)$ pro všechna $(x,y) \in \mathcal{U}^*(x_0, y_0)$. Nechť existují limity $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)$ a $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y)$ a platí, že*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y) = L.$$

Potom existuje také limita $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ a platí

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L.$$

Věta 2.5 *Nechť*
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L_1 \quad \text{a} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = L_2$$

a nechť $c, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ jsou libovolné konstanty. Potom

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \big(c\cdot f(x,y)\big) = c\cdot L_1$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \big(c_1\cdot f(x,y) + c_2\cdot g(x,y)\big) = c_1\cdot L_1 + c_2\cdot L_2$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \big(f(x,y)\cdot g(x,y)\big) = L_1\cdot L_2$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L_1}{L_2} \quad \text{pro } L_2 \neq 0,$$

pokud mají výrazy na pravé straně smysl v $\mathbb{R}^*$.

Poznámka: Počítání limit funkcí dvou proměnných je složitější než počítání limit funkcí jedné proměnné. V tomto případě totiž nemáme k dispozici žádnou analogii l'Hospitalova pravidla, pomocí něhož lze počítat limity tzv. neurčitých výrazů.

2.2 Dvojná a dvojnásobná limita

U funkce jedné proměnné jsme se při výpočtu limity v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ mohli k tomuto bodu "přibližovat" pouze po přímce, tj. pouze zleva nebo zprava.

U funkce dvou proměnných je situace mnohem složitější, protože ke zvolenému bodu (x_0, y_0) se můžeme "blížit" nekonečně mnoha různými způsoby.

Nechť bod $P_0 = (x_0, y_0)$ je hromadným bodem definičního oboru funkce f a nechť bod $P = (x, y)$ leží v nějakém $\mathcal{U}^*(P_0) \cap D_f$. Je-li $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$, pak musí nerovnost $|f(x,y)| - L| < \varepsilon$ z definice limity platit pro libovolný bod $P \in \mathcal{U}^*(P_0) \cap D_f$, ať už se k bodu P_0 blíží jakýmkoli způsobem.

Probíhá-li limitní proces tak , že se bod P blíží k P_0 po určitých křivkách, tj. že souřadnice bodu P jsou vázány jistou rovnicí $y = \varphi(x)$, pak limitu vypočteme tak, že do funkce $f(x,y)$ za y dosadíme $\varphi(x)$ a tím pádem pak počítáme limitu funkce jedné proměnné, tj. limitu $\lim_{x\to x_0} f(x, \varphi(x))$.

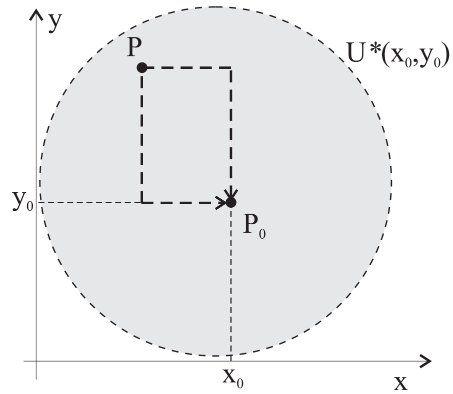
Rovnicí $y = \varphi(x)$ je dán většinou jednoparametrický systém křivek, které prochází body P a P_0. Například proložíme-li body P a P_0 přímkami, je příslušná rovnice ve tvaru $y = \varphi(x) = y_0 + k\cdot(x - x_0)$, kde $k \in \mathbb{R}$ je parametr (směrnice přímky).

Je-li pak takto vypočtená hodnota limity $\lim_{x\to x_0} f(x, \varphi(x))$ závislá na parametru použitého systému křivek, dvojná limita neexistuje. Není-li vypočtená hodnota na tomto parametru závislá, limita může, ale nemusí existovat. Pokud najdeme alespoň dvě různé cesty, pro něž se limita liší, pak původní limita neexistuje.

K vyšetřovámí dvojné limity lze také využít tzv. *dvojnásobná limita* (opakovaná, postupná). V této situaci se pohybujeme po speciálních cestách a to po lomených čarách, jejichž jednotlivé části jsou rovnoběžné s jednou ze souřadnicových os.

$$L_1 = \lim_{x\to x_0}\big(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\big)$$

$$L_2 = \lim_{y\to y_0}\big(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\big)$$



Věta 2.6 *Jestliže existuje limita* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$ *a také limity* L_1 *a* L_2*, potom* $L = L_1 = L_2$.

Poznámka: Z předchozí věty plyne, že pokud $L_1 \neq L_2$, pak limita L neexistuje. Rovnost $L_1 = L_2$ je pouze nutná, nikoli postačující podmínka pro existenci limity L.

2.3 Výpočet dvojných limit

Naším úkolem je vypočítat limitu $L = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$

a) Je-li funkce f v bodě (x_0, y_0) spojitá (viz následující kapitola), pak

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

b) Pokud dostáváme neurčitý výraz, snažíme se úpravami funkci vyjádřit v jiném (vhodnějším) tvaru.

c) Pomocí polárních souřadnic převedeme na limitu funkce jedné proměnné; transformační rovnice jsou tvaru $x = x_0 + \rho\cos\varphi$ a $y = y_0 + \rho\sin\varphi$. Po dosazení těchto vztahů dostaneme limitu

$$\overline{L} = \lim_{\rho\to 0^+} f(x_0 + \rho\cos\varphi, y = y_0 + \rho\sin\varphi).$$

Závisí-li limita $\overline{L}$ na úhlu φ, pak limita L neexistuje. Nezávisí-li $\overline{L}$ na φ, nelze o existenci limity L nic usoudit (protože jsme si ze všech možných směrů přibližování se k (x_0, y_0) vybrali jen některé, a to pouze přímky).

Specielně, dostaneme-li po transformaci limitu $\overline{L}$ ve tvaru $\overline{L} = \lim_{\rho\to 0^+} g(\rho)\cdot h(\varphi)$, kde $\lim_{\rho\to 0^+} g(\rho) = 0$ a funkce $h(\varphi)$ je omezená na intervalu $< 0, 2\pi)$, pak $L = 0$.

d) Užijeme znalostí základních limit (vzorečky stejné jako u funkce jedné proměnné; stačí použít substituci $t = g(x,y)$), například pokud $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = 0$, potom

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\sin(g(x,y))}{g(x,y)} = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (1 + g(x,y))^{\frac{1}{g(x,y)}} = e$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\ln(1 + g(x,y))}{g(x,y)} = 1$$

3 Spojitost funkce dvou proměnných

3.1 Spojitost funkce v bodě

Definice 3.1 Nechť bod $(x_0, y_0) \in D_f$. Řekneme, že *funkce f je spojitá v bodě* (x_0, y_0), jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall (x, y) \in D_f \cap \mathcal{U}_\delta(x_0, y_0) \ : \ |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

Věta 3.1 *Je-li $(x_0, y_0) \in D_f$ hromadným bodem D_f, pak platí:*

$$f \text{ je spojitá v bodě } (x_0, y_0) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

Pro ilustraci spojitosti funkce v bodě lze použít analogický obtázek jako v případě limity.

Protože se spojitost funkce definuje analogicky jako u funkcí jedné proměnné, platí také obdobná tvrzení:

Věta 3.2 *Je-li funkce spojitá v bodě (x_0, y_0), pak existuje okolí bodu (x_0, y_0) takové, že funkce f je na tomto okolí omezená.*

Věta 3.3 *Jsou-li funkce f a g spojité v bodě $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, pak jsou v tomto bodě spojité i funkce $f \pm g$ a $f \cdot g$ a je-li navíc $g(x_0, y_0) \neq 0$, je v tomto bodě spojitá i funkce $\frac{f}{g}$.*

Věta 3.4 *Uvažujme složenou funkci $F(x, y) = f(g(x, y), h(x, y))$. Nechť jsou funkce g a h spojité v bodě (x_0, y_0) a nechť $u_0 = g(x_0, y_0)$ a $v_0 = h(x_0, y_0)$. Je-li funkce f spojitá v bodě (u_0, v_0), pak je složená funkce F spojitá v bodě (x_0, y_0).*

3.2 Spojitost funkce na množině

Definice 3.2 Řekneme, že funkce f je spojitá na množině $M \subset D_f \subset \mathbb{R}^2$, je-li spojitá v každém bodě množiny M, tzn. jestliže pro každý bod $(x_0, y_0) \in M$ platí

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0);(x,y)\in M} f(x, y) = f(x_0, y_0),$$

kde limitu chápeme takto:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall (x, y) \in \mathcal{U}_\delta(x_0, y_0) \cap M \ : \ |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

Z předchozích vět a definic ihned plyne následující věta:

Věta 3.5 *Elementární funkce v $\mathbb{R}^2$ jsou spojité na svých definičních oborech.*

Věta 3.6 (Weierstrassova) *Je-li funkce f spojitá na kompaktní množině $M \subset D_f \subset \mathbb{R}^2$, potom na množině M nabývá své nejmenší a největší hodnoty, tj. existují body $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in M$ takové, že*

$$f(x_1, y_1) = \max\{f(x, y); (x, y) \in M\} \quad \text{a} \quad f(x_2, y_2) = \min\{f(x, y); (x, y) \in M\}.$$

Poznámka: Z předchozí věty ihned plyne jednoduchý důsledek: *Je-li funkce spojitá na kompaktní množině, pak je na této množině omezená.*

Věta 3.7 (Bolzanova) *Nechť je funkce spojitá na otevřené souvislé množině $M \subset D_f \subset \mathbb{R}^2$ a A a B jsou libovolné prvky z M, pro něž platí $f(A) \neq f(B)$. Potom funkce f nabývá všech hodnot mezi čísly $f(A)$ a $f(B)$, tzn. že ke každému číslu c ležícímu mezi $f(A)$ a $f(B)$ existuje bod $C \in M$ tak, že $f(C) = c$.*

Poznámka: Z předchozí věty ihned plyne jednoduché tvrzení: *Nechť je funkce f spojitá na otevřené souvislé množině M a nechť existují $A, B \in M$ tak, že $f(A) \cdot f(B) < 0$. Potom existuje alespoň jeden bod $C \in M$ tak, že $f(C) = 0$.*