Extrémy funkcí dvou proměnných

Příklad 1. Určete lokální extrémy funkce $f(x, y)$

a) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$
[Stac. bod (0,0) - není extrém; (1,1) - o.l.min]

b) $f(x, y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$
[Stac. body (-4,2) a (0,0) - není extrém; (-4,-2) - l.max]

c) $f(x, y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$
[Stac. body (0,0) - o.l.max, (0,1), (0,-1),(1/2,0) a (-1/2,0) - není extrém; (1/2,1), (1/2,-1), (-1/2,1) a (-1/2,-1) - l.min.]

d) $f(x, y) = x^2 + x^2y^2$
[Stac. body (0,c), kde $c \in \mathbb{R}$; (0,0) - neostré l.min]

e) $f(x, y) = x^2 + y^3$
[Stac. bod (0,0) - není extrém]

f) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
[Stac. body neexistují; (0,0) - o.l.min (zároveň i glob.min)]

g) $f(x, y) = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$
[(-2,0) - o.l.min]

Příklad 2. Určete vázané lokální extrémy funkce $f(x, y)$

a) $f(x, y) = 6 - 4x - 3y$ za podmínky $x^2 + y^2 = 1$
[$\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$, $\lambda = \frac{5}{2}$ - min; $\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$, $\lambda = -\frac{5}{2}$ - max;]

b) $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ za podmínky $x^2 - 2x + 2y^2 + 4y = 0$
[$(2, -2)$, $\lambda = -2$ - max; $(0, 0)$, $\lambda = 0$ - min]

c) $f(x, y) = x + y$ za podmínky $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - 1 = 0$
[$(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $\lambda = \sqrt{2}$ - min; $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $\lambda = -\sqrt{2}$ - max;]

Příklad 3. Určete globální extrémy funkce $f(x, y)$ na množině M zadané nerovnostmi

a) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$, kde $M : |x| + |y| \leq 1$
[(0,0) - g.min; $(\pm 1, 0)$ a $(0, \pm 1)$ - g.max]

b) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y$, kde $M : x^2 + y^2 \leq 25$
[(3,-4) - g.min; (-3,4) - g.max]

c) $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$, kde M je trojúhelník s vrcholy (0,0), (0,-3) a (-3,0)
[(-1,1) - g.min; (0,-3) a (-3,0) - g.max]