Obsah

6 Extrémy funkcí dvou proměnných

Extrémy funkcí jsou jednou z nejdůležitějších aplikací diferenciálního počtu a setkáváme se s nimi takřka všude. Například ekonomické rozhodování se řídí požadavkem maximálního zisku a minimálních nákladů, přičemž tyto dvě veličiny často závisí na více proměnných.

6.1 Lokální extrémy

Definice 6.1 Nechť f je funkce dvou proměnných a nechť $(x_0, y_0) \in \mathrm{D}_f$.

- Řekneme, že funkce f má v bodě (x_0, y_0) *lokální minimum*, jestliže existuje okolí $\mathcal{U}(x_0, y_0)$ tak, že
$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0) \qquad \forall (x, y) \in \mathcal{U}(x_0, y_0) \cap \mathrm{D}_f.$$
- Řekneme, že funkce f má v bodě (x_0, y_0) *lokální maximum*, jestliže existuje okolí $\mathcal{U}(x_0, y_0)$ tak, že
$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \qquad \forall (x, y) \in \mathcal{U}(x_0, y_0) \cap \mathrm{D}_f.$$
- Řekneme, že funkce f má v bodě (x_0, y_0) *ostré lokální minimum*, jestliže existuje redukované okolí $\mathcal{U}^*(x_0, y_0)$ tak, že
$$f(x, y) > f(x_0, y_0) \qquad \forall (x, y) \in \mathcal{U}^*(x_0, y_0) \cap \mathrm{D}_f.$$
- Řekneme, že funkce f má v bodě (x_0, y_0) *ostré lokální maximum*, jestliže existuje redukované okolí $\mathcal{U}^*(x_0, y_0)$ tak, že
$$f(x, y) < f(x_0, y_0) \qquad \forall (x, y) \in \mathcal{U}^*(x_0, y_0) \cap \mathrm{D}_f.$$
- (Ostrá) lokální minima a (ostrá) lokální maxima se souhrnně nazývají (*ostré*) *lokální extrémy*. Hodnota $f(x_0, y_0)$ se nazývá (*ostré*) *lokální minimum*, resp. (*ostré*) *lokální maximum*; bod (x_0, y_0) se nazývá *bod příslušného lokálního extrému.*

Věta 6.1 (Nutná podmínka existence lokálního extrému) *Nechť má funkce f v bodě (x_0, y_0) lokální extrém. Existují-li v bodě (x_0, y_0) parciální derivace prvního řádu, pak jsou rovny nule, tj.*
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Definice 6.2 Bod $(x_0, y_0) \in \mathrm{D}_f$ se nazývá *stacionární bod funkce f*, jestliže v něm existují obě parciální derivace prvního řádu a platí
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Věta 6.2 (Postačující podmínka existence lokálního extrému) *Nechť má funkce f na okolí bodu (x_0, y_0) spojité parciální derivace druhého řádu. Označme*
$$D_1 = f''_{xx}(x_0, y_0) \quad \text{a} \quad D_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix}.$$

Potom

- *jestliže $D_2 > 0$, funkce f má v (x_0, y_0) ostrý lokální extrém; přitom*
  - *je-li $D_1 > 0$, pak jde o ostré lokální minimum*
  - *je-li $D_1 < 0$, pak jde o ostré lokální maximum*
- *jestliže $D_2 < 0$, funkce f nemá v bodě (x_0, y_0) lokální extrém*
- *jestliže $D_2 = 0$, nelze tímto způsobem rozhodnout.*

Body podezřelé z lokálního extrému

a) stacionární body

b) body, v nichž alespoň jedna parciální derivace neexistuje a zbývající je rovna nule nebo body, v nichž neexistuje ani jedna parciální derivace

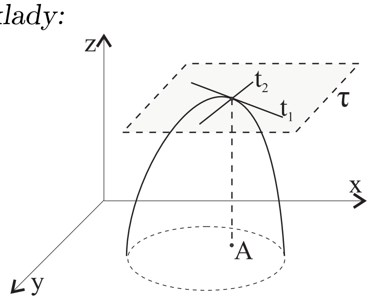
O existenci a typu extrému pak rozhodneme podle postačující podmínky pro lok. extrém (lze pouze v případě a)) nebo podle definice.

Geometrická interpretace lokálních extrémů

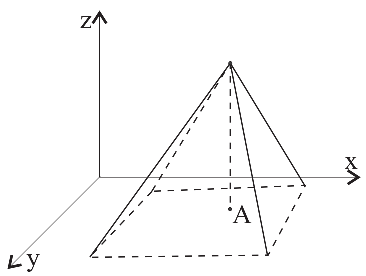
Výpočet lokálních extrémů funkce dvou proměnných vede ke stacionárním bodům plochy $z = f(x,y)$, v nichž je tečná rovina rovnoběžná s rovinou (xy), tj. k bodům v jejichž okolí se plocha $z = f(x,y)$ nachází buď jen pod nebo jen nad tečnou rovinou τ.

Stacionárním bodům, které nevedou k lokálním extrémům, odpovídají na ploše $z = f(x,y)$ body, v jejichž okolí má plocha tvar sedla (tzv. sedlové body).

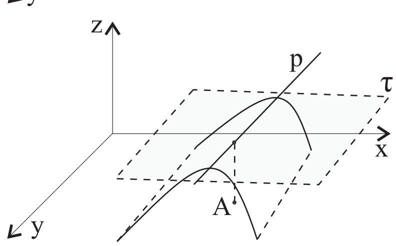
Příklady:



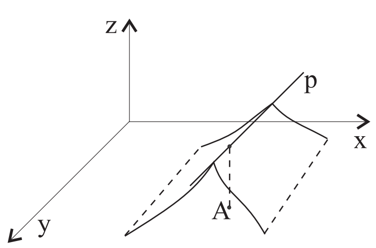
ostré lokální maximum v A;
$f'_x = f'_y = 0$ v bodě A;
tečná rovina τ lze sestrojit



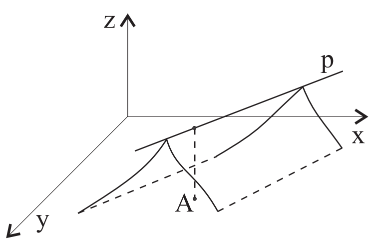
ostré lokální maximum v A;
f'_x ani f'_y v bodě A neexistují;
tečná rovina τ nelze sestrojit



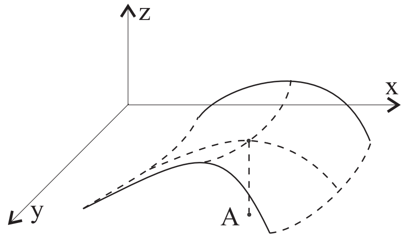
neostré lokální maximum v A;
přímka p je rovnoběžná s rovinou (xy);
$f'_x = f'_y = 0$ v bodě A;
tečná rovina τ lze sestrojit



neostré lokální maximum v A;
přímka p je rovnoběžná s rovinou (xy) i s osou y;
f'_x neexistuje, $f'_y = 0$ v bodě A;
tečná rovina τ nelze sestrojit



neostré lokální maximum v A;
přímka p je rovnoběžná s rovinou (xy)
a není rovnoběžná s osou y;
f'_x ani f'_y v bodě A neexistují;
tečná rovina τ nelze sestrojit



funkce má v A sedlo, tj. nemá v A lok. extrém;
$f'_x = f'_y = 0$ v bodě A;
tečná rovina τ nelze sestrojit

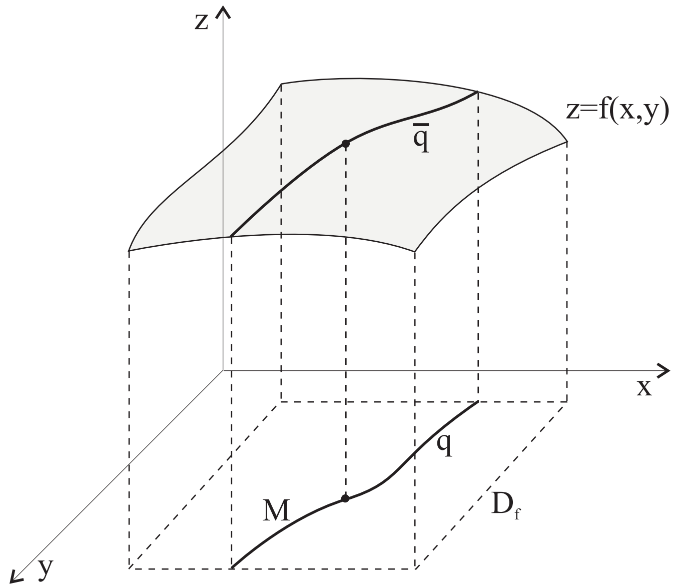
6.2 Vázané lokální extrémy

V praxi je obvyklá situace, kdy hledáme extrémy funkce nikoli na celém jejím definičním oboru, ale pouze na nějaké její podmnožině. Typicky tuto podmnožinu tvoří ty body z D_f, které splňující zadanou podmínku, příp. podmínky.

Nechť je dána funkce f na $\mathrm{D}_f \subset \mathbb{R}^2$. Označme M množinu těch bodů (x, y) z D_f, jejichž souřadnice vyhovují rovnici $g(x, y) = 0$, tj.

$$M = \{(x, y) \in \mathrm{D}_f;\ g(x, y) = 0\}$$

Úlohou je najít lokálně extrémní hodnoty funkce f na množině M. Tyto lokální extrémy se nazývají *vázané lokální extrémy funkce* f. Rovnice, která určuje množinu M se nazývá *vazba*.



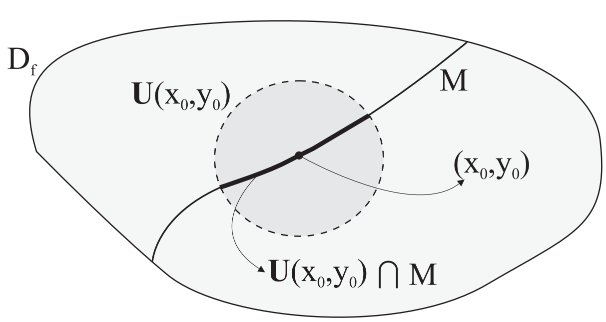
Definice 6.3 Nechť $M = \{(x, y) \in \mathrm{D}_f;\ g(x, y) = 0\}$.

- Řekneme, že funkce f má v bodě (x_0, y_0) *vázané lokální maximum při vazbě* $g(x, y) = 0$, jestliže existuje okolí $\mathcal{U}(x_0, y_0)$ tak, že

$$f(x, y) \le f(x_0, y_0) \quad \forall (x, y) \in \mathcal{U}(x_0, y_0) \cap M.$$

- Řekneme, že funkce f má v bodě (x_0, y_0) *vázané lokální minimum při vazbě* $g(x, y) = 0$, jestliže existuje okolí $\mathcal{U}(x_0, y_0)$ tak, že

$$f(x, y) \ge f(x_0, y_0) \quad \forall (x, y) \in \mathcal{U}(x_0, y_0) \cap M.$$



Poznámka: Množinou M bodů $(x, y) \in \mathrm{D}_f$ vyhovujících rovnici $g(x, y) = 0$ je rovinná křivka $q \subset \mathbb{R}^2$. Grafem funkce f definované na množině M je prostorová křivka $\overline{q} \subset \mathbb{R}^3$ - je to průsečnice plochy

$z = f(x,y)$ s rovinou kolmou na rovinu (xy), jejíž průsečnice s rovinou (xy) je tvořena křivkou q. Najít lokální extrémy funkce f na M znamená najít ty body křivky $\overline{q}$, které mají na svém okolí největší, resp. nejmenší z-ovou souřadnici.

6.2.1 Metody hledání vázaných lokálních extrémů

Úkolem je nalézt vázané lokální extrémy funkce f dvou proměnných s vazbou $g(x,y) = 0$. Máme k dispozici dvě metody a to přímé dosazení a tzv. Lagrangeovu metodu (případně jejich kombinaci). Cílem obou metod je převést původní úlohu s vazbami na úlohu bez vazeb, tj. na hledání (volných) lokáních extrémů.

6.2.2 Přímé dosazení

Předpokládejme, že z rovnice $g(x,y) = 0$ lze explicitně vyjádřit jednu nebo druhou proměnnou, tj. že lze vyjádřit $y = \varphi(x)$, resp. $x = \phi(y)$. Tento vztah dosadíme do funkce f a dostaneme funkci jedné proměnné definovanou na M, konkrétně buď funkci $F(x) = f(x, \varphi(x))$ proměnné x nebo funkci $F(y) = f(\psi(y), y)$ proměnné y. Lokální extrémy této funkce F jsou pak vázanými lokálními extrémy funkce f při vazbě $g(x,y) = 0$.

Úlohu najít vázané lokální extrémy funkce dvou proměnných jsme převedli na úlohu najít lokální extrémy funkce jedné proměnné.

6.2.3 Lagrangeova metoda

Jestliže z vazby $g(x,y) = 0$ nelze vyjádřit ani jednu z proměnných nebo je toto vyjádření příliš složité, užívá se tzv. *Lagrangeova metoda neurčitých koeficientů.*

Věta 6.3 (Lagrange) *Nechť mají funkce f a g spojité parciální derivace prvního řádu na nějaké otevřené množině U obsahující množinu M. Definujme Lagrangeovu funkci L vztahem*

$$L(x,y) = f(x,y) + \lambda \cdot g(x,y) \quad \forall (x,y) \in U,$$

kde λ je (neurčitá) reálná konstanta (tzv. Lagrangeův multiplikátor). Nechť je trojice (x_0, y_0, λ_0) řešením soustavy

$$\begin{aligned} L'_x(x,y) &= 0 \\ L'_y(x,y) &= 0 \\ g(x,y) &= 0 \end{aligned}$$

Má-li funkce L v bodě (x_0, y_0) pro vypočtenou hodnotu λ_0 lokální extrém, pak má funkce f v tomto bodě vázaný lokální extrém stejného typu s vazbou $g(x,y) = 0$.

Poznámka: Protože pro všechna $(x,y) \in M$ platí $g(x,y) = 0$, dostáváme $L(x,y) = f(x,y)$ na M.

Poznámka: Obrácená věta neplatí!
Ne v každém bodě, v němž má funkce f vázaný lokální extrém s vazbou $g(x,y) = 0$, má lokální extrém i příslušná Lagrangeova funkce L. Znamená to, že *Lagrangeovou metodou nemusíme najít všechny vázané lokální extrémy funkce f.*

Postup při hledání vázaných lokálních extrémů Lagrangeovou metodou

- Vytvoříme Lagrangeovu funkci $L(x,y) = f(x,y) + \lambda \cdot g(x,y)$
- Předpokládejme, že existují parciální derivace funkcí f a g. Potom funkce L může mít lokální extrémy pouze ve stacionárních bodech, tj. v bodech, jejichž souřadnice vyhovují rovnicím

$$L'_x(x,y) = 0 \qquad \text{a} \qquad L'_y(x,y) = 0$$

- Protože nás zajímají jen ty stacionární body, které leží v množině M, přidáme ještě podmínku $g(x,y)=0$ (vazba).

- Dostáváme tak soustavu tří (obecně nelineárních) rovnic o třech neznámých (x,y,λ), kterou je nutné vyřešit:

$$\begin{aligned} L'_x(x,y) &= 0 \\ L'_y(x,y) &= 0 \\ g(x,y) &= 0 \end{aligned}$$

- O tom, zda v takto nalezeném stacionárním bodě má L (při nalezené hodnotě λ) lokální extrém, rozhodneme podle postačující podmínky pro lokální extrém.

Poznámka: Pokud v nějakém bodě nenastane extrém funkce L, tak se může přesto stát, že funkce f bude mít v tomto bodě vázaný lokální extrém. Případnou existenci tohoto extrému musíme vyšetřit jiným způsobem (např. z definice vázaného lokálního extrému nebo pomocí druhého diferenciálu a vazby).

6.3 Globální extrémy

Definice 6.4 Říkáme, že *funkce f má na množině $M \subset D_f$ globální maximum* (resp. *globální minimum*), existuje-li alespoň jeden bod $(x_0,y_0) \in M$ takový, že

$$f(x_0,y_0) \geq f(x,y) \quad \forall (x,y) \in M,$$

$$\text{resp. } f(x_0,y_0) \leq f(x,y) \quad \forall (x,y) \in M.$$

Souhrnně mluvíme o *globálních extrémech funkce f na množině M*. Číslo $f(x_0,y_0) \in \mathbb{R}$ se nazývá *globální maximum* (resp. *globální minimum*) *funkce f na M* a značí se

$$f(x_0,y_0) = \max_{(x,y)\in M} f(x,y) = \max\{f(x,y); (x,y) \in M\},$$

$$\text{resp. } f(x_0,y_0) = \min_{(x,y)\in M} f(x,y) = \min\{f(x,y); (x,y) \in M\}.$$

Poznámka:

- Existence globálních extrémů je zaručena v případě, že funkce f je spojitá na neprázdné kompaktní množině (Weierstrassova věta). Není-li M kompaktní, je situace obvykle komplikovaná a je nutno v každém případě postupovat odlišně.

- Globální maximum (globální minimum) je jen jedno, ale funkce ho může nabývat i v nekonečně mnoha různých bodech.

Následující věta nám říká, ve kterých bodech Z M mohou nastat globální extrémy.

Věta 6.4 *Nechť $M \subset D_f$ je kompaktní množina a nechť funkce f je spojitá ne M. Potom funkce f nabývá svých globálních extrémů buď v bodech lokálního extrému ležících uvnitř M nebo v některém hraničním bodě.*

6.3.1 Postup při hledání globálních extrémů

Cílem je určit globální extrémy funkce f dvou proměnných na množině $M \subset D_f$.

1. Ověříme, zda je množina M kompaktní a funkce f na M spojitá. Pak existují globální extrémy.
2. Určíme body, které jsou podezřelé z globálních extrémů, tj.
   - (α) body podezřelé z lokálních extrémů ležící uvnitř M
   - (β) body z hranice množiny M podezřelé z vázaných lokálních extrémů
   - (γ) body z hranice M, které doposud nebyly uvažovány (v nichž se hranice láme, krajní body intervalů,...)
3. Vypočítáme funkční hodnoty ve všech podezřelých bodech. Největší a nejmenší z nich jsou globální extrémy f na M.

Poznámka: V bodě 3. nemusíme ověřovat existenci extrému v podezřelém bodě ani určovat, zda se jedná o lokální maximum nebo minimum.

Poznámka: Pokud je množina M otevřená, nemusí funkce f mít na M globální extrémy. Pokud je ale má, tak to jsou body typu (α).