V. Riemannův (dvojný) integrál

Obsah

1 Základní pojmy a definice

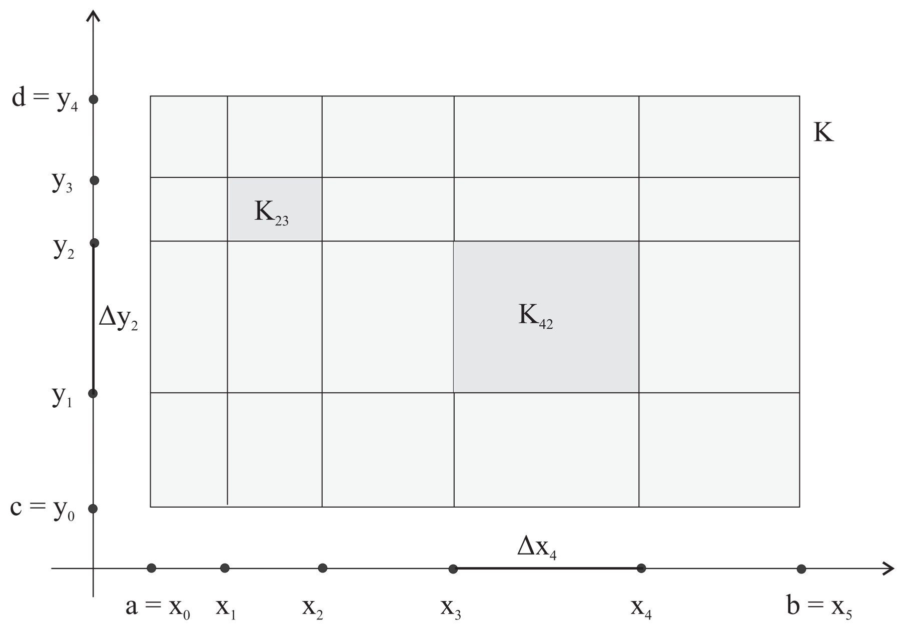
Dvojný integrál zavedeme nejdříve pro funkci dvou proměnných na obdélníku. Formální postup bude stejný jako u funkce jedné proměnné na intervalu. Geometrickou motivací zavedení dvojného integrálu je úloha určit objem tělesa s podstavou K v rovině (xy) a horní stěnou tvořenou částí grafu nezáporné omezené funkce f (na množině K).

Integračním oborem jednorozměrného integrálu byl vždy interval. U dvourozměrného integrálu mohou být integrační obory rozmanitější, např. obdélník, čtverec, lichoběžník, kruh, kruhová výseč atd.

(Analogický postup, kterým zavedeme dvojný integrál, lze uplatnit také na případ obecného n-rozměrného integrálu, kde $n \in \mathbb{N}$.)

Uvažujme uzavřený obdélník $K \subset \mathbb{R}^2$, kde K je kartézským součinem uzavřených intervalů $[a, b]$ na ose x a $[c, d]$ na ose y, tj. $K = [a, b] \times [c, d]$.

Definice 1.1 Nechť posloupnost bodů $D_x = \{a = x_o < x_1 < x_2 < \ldots < x_m = b\}$ je dělením intervalu $[a, b]$ a $D_y = \{c = y_o < y_1 < y_2 < \ldots < y_n = d\}$ je dělením intervalu $[c, d]$. Uspořádanou dvojici $D = (D_x, D_y)$ nazýváme *dělením obdélníku* K. Obdélník $K_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, kde $i = 1, 2, \ldots m$ a $j = 1, 2, \ldots n$, se nazývá *částečný interval (obdélník) dělení* D. Je-li $\nu(D_x)$ norma dělení D_x a $\nu(D_y)$ norma dělení D_y, pak maximum z těchto dvou čísel označíme jako $\nu(D)$ a nazveme ho *normou dělení* D, tj. $\nu(D) = \max\{\nu(D_x), \nu(D_y)\}$.



Uvažujme nyní dělení D obdélníku K na $m \cdot n$ obdélníků K_{ij}, $i = 1, 2, \ldots m$, $j = 1, 2, \ldots n$.

Označme $\mu(K_{ij})$ obsah (míru) obdélníku K_{ij}, tj.

$$\mu(K_{ij}) = \Delta x_i \cdot \Delta y_j = (x_i - x_{i-1}) \cdot (y_j - y_{j-1}).$$

Definice 1.2 Nechť f je funkce dvou proměnných definovaná a omezená na obdélníku $K = [a, b] \times [c, d]$ a nechť $D = (D_x, D_y)$ je dělení K. Pro všechna $i = 1, 2, \ldots m$ a $j = 1, 2, \ldots n$ označme

$$m_{ij} = \inf\{f(x, y);\ (x, y) \in K_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]\} \text{ a}$$

$$M_{ij} = \sup\{f(x, y);\ (x, y) \in K_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]\}.$$

(Tzn. číslo m_{ij} (resp. M_{ij}) je infimum (resp. supremum) funkce f na obdélníku $K_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$.) Potom číslo

$$s(f, D) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} \cdot \mu(K_{ij})$$

nazýváme *dolní součet funkce f na obdélníku K při dělení D* a číslo

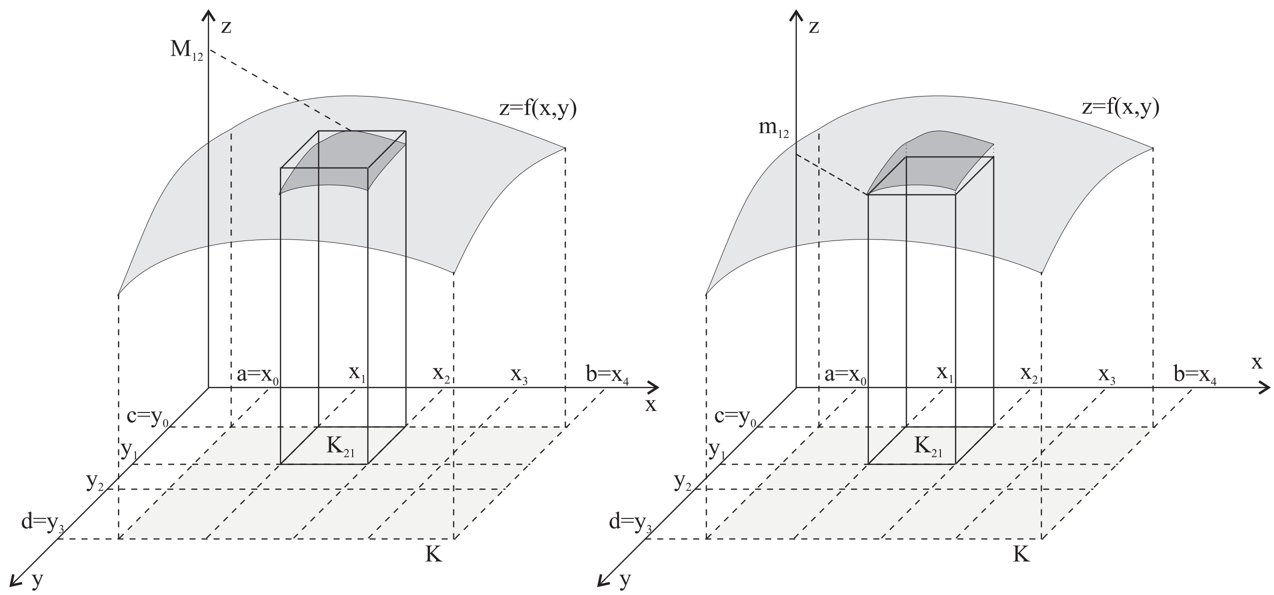
$$S(f,D)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} M_{ij}\cdot\mu(K_{ij})$$

horní součet funkce f na obdélníku K při dělení D.

Poznámka: Předpoklad omezenosti funkce f na K zaručuje existenci infima a suprema funkce na obdélnících K_{ij}, tj. zaručuje existenci čísel m_{ij} a M_{ij} pro všechna $i=1,2,\dots m$, $j=1,2,\dots n$.
Poznámka: V případě, že funkce f je nezáporná na obdélníku M, mají čísla $s(f,D)$ a $S(f,D)$ následující význam (viz obrázek):

Číslo $m_{ij}\cdot\mu(K_{ij})$ je objem kvádru vepsaného ploše na obdélníku K_{ij} a $s(f,D)$ součet objemů kvádrů vepsaných ploše na všech jednotlivých dělících obdélnících.

Číslo $M_{ij}\cdot\mu(K_{ij})$ je objem kvádru opsaného ploše na obdélníku K_{ij} a $S(f,D)$ součet objemů kvádrů opsaných ploše na všech jednotlivých dělících obdélnících.



Věta 1.1 *Platí*

$$m\cdot\mu(K)\ \le\ s(f,D_1)\ \le\ S(f,D_2)\ \le\ M\cdot\mu(K)$$

kde $m=\inf\{f(x,y);\,(x,y)\in K\}$, $M=\sup\{f(x,y);\,(x,y)\in K\}$ a D_1 a D_2 jsou libovolná dělení obdélníku K.

Na daném obdélníku K můžeme zvolit nekonečně mnoho různých dělení; množinu všech dělení obdélníka K označme $\mathcal{D}(K)$. Pro každé dělení $D\in\mathcal{D}(K)$ můžeme určit horní a dolní součet $s(f,D)$ a $S(f,D)$, tzn. že dostaneme množinu $\{s(f,D);\,D\in\mathcal{D}(K)\}$ všech dolních součtů a množinu $\{S(f,D);\,D\in\mathcal{D}(K)\}$ všech horních součtů funkce f na obdélníku K.

Podle předchozí věty jsou obě tyto číselné množiny omezené a to nás opravňuje k vyslovení definice:

Definice 1.3 Nechť funkce f je definovaná a omezená na obdélníku K. Označme

$$\underline{\iint}_K f(x,y)\,dx\,dy=\sup\{s(f,D);\,D\in\mathcal{D}(K)\}\quad\text{a}\quad\overline{\iint}_K f(x,y)\,dx\,dy=\inf\{S(f,D);\,D\in\mathcal{D}(K)\}.$$

Číslo $\underline{\iint}_K f(x,y)\,dx\,dy$ se nazývá *dolní Riemannův integrál funkce f na K* a číslo $\overline{\iint}_K f(x,y)\,dx\,dy$ *horní Riemannův integrál funkce f na K*. Jestliže se obě tato čísla rovnají, nazýváme jejich společnou hodnotu *dvojný Riemannův integrál funkce f na K* a značíme ji

$$\iint_K f(x,y)\,dx\,dy.$$

Poznámka: Z předpokladu omezenosti a z předchozí věty plyne, že horní a dolní součet, horní a dolní integrál i dvojný integrál jsou konečná reálná čísla.

Poznámka: Někdy se dvojný integrál značí pouze jako $\int_K f(x,y)\,dx\,dy$. Že se jedná o dvojný integrál (a nikoli o jednorozměrný integrál) pak poznáme podle toho, jak vypadá množina K a podle symbolů $dx\,dy$ v integrálu.

2 Podmínky existence dvojného integrálu

Označme jako $\mathcal{R}(K)$ množinu všech funkcí definovaných na obdélníku K, pro něž existuje dvojný Riemannův integrál na K, tj. zápis $f \in \mathcal{R}(K)$ znamená, že existuje dvojný Riemannův integrál funkce f na K. V tom případě také říkáme, že funkce f je *Riemannovsky integrovatelná na obdélníku* K.

Věta 2.1 *Nechť je funkce f spojitá na obdélníku $K \subset \mathbb{R}^2$. Potom $f \in \mathcal{R}(K)$.*

Věta 2.2 *Nechť je funkce f omezená a skoro všude spojitá na obdélníku $K \subset \mathbb{R}^2$. Potom $f \in \mathcal{R}(K)$.*

Poznámka: Funkce se nazývá *skoro všude spojitá na* K, jestliže má nejvýše konečný počet bodů nespojitosti nebo jestliže všechny body nespojitosti leží na nejvýše konečném počtu grafů spojitých funkcí.

3 Vlastnosti dvojného integrálu

Dvojný Riemannův integrál má obdobné vlastnosti jako jednorozměrný R-integrál.

Věta 3.1 *Nechť $f \in \mathcal{R}(K)$, $g \in \mathcal{R}(K)$, $c \in \mathbb{R}$. Potom*

- *$f + g \in \mathcal{R}(K)$ a platí (linearita)*

$$\iint_K [f(x,y) + g(x,y)]\,dx\,dy = \iint_K f(x,y)\,dx\,dy + \iint_K g(x,y)\,dx\,dy$$

- *$c \cdot f \in \mathcal{R}(K)$ a platí*

$$\iint_K c \cdot f(x,y)\,dx\,dy = c \cdot \iint_K f(x,y)\,dx\,dy$$

- *$f \cdot g \in \mathcal{R}(K)$*

- *jestliže $f(x,y) \le g(x,y)$ pro všechna $(x,y) \in K$, platí (monotonie)*

$$\iint_K f(x,y)\,dx\,dy \le \iint_K g(x,y)\,dx\,dy$$

- *$|f| \in \mathcal{R}(K)$ a platí*

$$\left| \iint_K f(x,y)\,dx\,dy \right| \le \iint_K |f(x,y)|\,dx\,dy$$

- *jestliže existují konstanty $A, B \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $(x,y) \in K$ platí $A \le f(x,y) \le B$, pak*

$$A \cdot \mu(K) \le \iint_K f(x,y)\,dx\,dy \le B \cdot \mu(K)$$

- *jestliže $K = K_1 \cup K_2$, kde K_1 a K_2 jsou dva obdélníky s vlastností $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, pak $f \in \mathcal{R}(K_1)$, $f \in \mathcal{R}(K_2)$ a platí (aditivita vzhledem k integračnímu oboru)*

$$\iint_K f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{K_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{K_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

Poznámka: První dvě vlastnosti lze rozšířit na konečný počet funkcí: Jestliže $f_s \in \mathcal{R}(K)$ a $c_s \in \mathbb{R}$ pro všechna $s = 1, 2, \dots S$, $S \in \mathbb{N}$, pak $c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_S f_S \in \mathcal{R}(K)$ a platí

$$\iint_K (c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_S f_S)\, dx\, dy = \iint_K c_1 f_1\, dx\, dy + \iint_K c_2 f_2\, dx\, dy + \cdots + \iint_K c_S f_S\, dx\, dy$$

Poznámka: Uvažujeme-li konstantní funkci $f(x, y) = c \in \mathbb{R}$ na K, potom

$$\iint_K c\, dx\, dy = c \iint_K dx\, dy = c \cdot \mu(K)$$

Tedy speciálně pro $f(x, y) = 1$ dostaneme

$$\iint_K 1\, dx\, dy = \iint_K dx\, dy = \mu(K) \dots \text{obsah } K$$

Platí také, že

$$\iint_K 0\, dx\, dy = 0$$

4 Výpočet dvojného integrálu; převod na dvojnásobný integrál

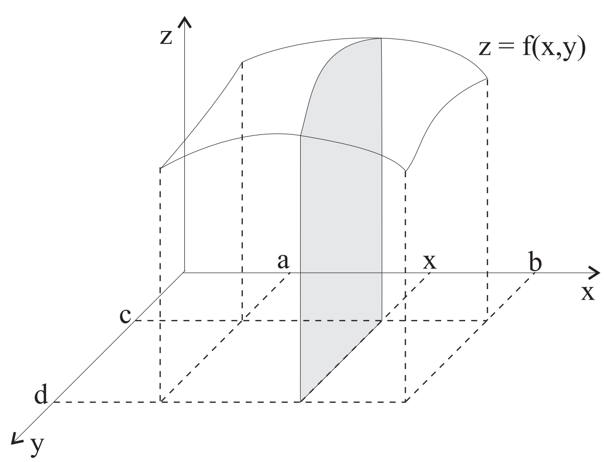
Dvojný, stejně jako jednorozměrný integrál, nelze prakticky počítat podle definice. Proto se výpočet dvojného integrálu převádí na výpočet dvou jednorozměrných integrálů, na tzv. *dvojnásobný integrál.* Přitom musíme zohlednit různé typy množin, pro něž daný integrál počítáme. Návod, jak tento převod uskutečnit, nám dává tzv. *Fubiniova věta.*

Věta 4.1 (Fubiniova pro obdélník) *Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném obdélníku $K = [a, b] \times [c, d]$. Potom platí*

$$\iint_K f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy$$

Z výše uvedeného je vidět, že počítáme dva jednorozměrné integrály. Nejdříve integrujeme podle jedné z proměnných (druhou přitom považujeme za konstantu) a výsledek potom zintegrujeme podle zbývající proměnné. Pořadí integrování je možno zvolit libovolně, výsledek se nebude lišit. Volba pořadí ale může hrát zásadní roli pro samotný výpočet, protože při "nevhodné" volbě pořadí integrace můžeme dospět buď k dosti složitému integrálu nebo dokonce k takovému, který neumíme vypočítat.

Geometrický náhled:
Nechť funkce f je spojitá a nezáporná na obdélníku K. Pro pevné x vyjadřuje integrál $\int_c^d f(x, y)\, dy = F(x)$ obsah řezu tělesa rovinou $x = konstanta$. Pro malé Δx je $\Delta x \cdot F(x) = \Delta x \cdot \int_c^d f(x, y)\, dy$ objem malé vrstvy uvažovaného tělesa. Tuto vzniklou funkci $F(x)$ (vnitřní integrál) nyní zintegrujeme podle proměnné x na intervalu $[a, b]$ a tím dostaneme objem tělesa, které má za podstavu obdélník K, jeho stěny jsou tvořeny částmi rovin $x = a$, $x = b$, $y = c$ a $y = d$ a horní podstava je tvořena částí grafu funkce $f(x, y)$. Ke stejnému výsledku bychom dospěli, kdybychom dané těleso rozřezali rovinami $y = konstanta$.



4.1 Dvojný integrál na měřitených množinách

Doposud jsme integrovali funkce pouze na obdélníku. Pro praxi to ale nestačí, potřebuje počítat integrály přes obecnější množiny. I v tomto případě se bude dvojný integrál převádět na dvojnásobný, pouze s tím rozdílem, že integračními mezemi nebudou konstanty, ale funkce.

Přesto se ale musíme omezit pouze na tzv. *měřitelné množiny.* V praxi se ale prakticky s jinými nesetkáváme. Míra je zobecněním pojmu obsahu (v $\mathbb{R}^2$), resp. objemu (v $\mathbb{R}^3$). Množina $K \subset \mathbb{R}^2$ je měřitelná, jestliže existuje její obsah, tj. jestliže existuje integrál

$$\iint_K dx\,dy = \mu(K) \in \mathbb{R}.$$

Definice 4.1 Existuje-li integrál $\iint_K dx\,dy$, pak se množina K nazývá *měřitelná v Jordanově smyslu* a číslo $\mu(K) = \iint_K dx\,dy$ se nazývá *míra množiny* K.

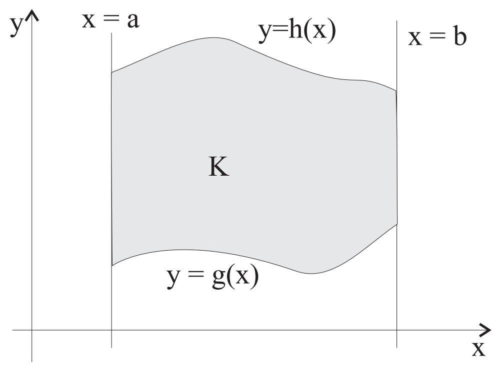
Věta 4.2 *Omezená množina $K \subset \mathbb{R}^2$ je měřitelná právě tehdy, když je její hranice tvořena grafy spojitých funkcí jedné proměnné definovaných na uzavřených intervalech.*

Nejčastěji se budeme setkávat s následujícími množinami, které se nazývají *elementární* a rozdělujeme je na tři základní typy:

- *Elementární množina vzhledem k proměnné x* je množina tvaru

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in [a, b], f(x) \le y \le g(x)\},$$

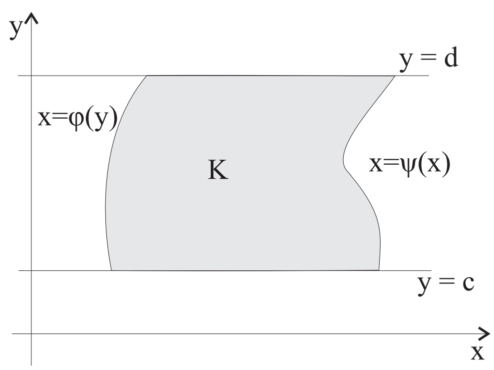
kde f a g jsou funkce jedné reálné proměnné spojité na $[a, b]$ takové, že pro všechna $x \in (a, b)$ platí $f(x) < g(x)$.



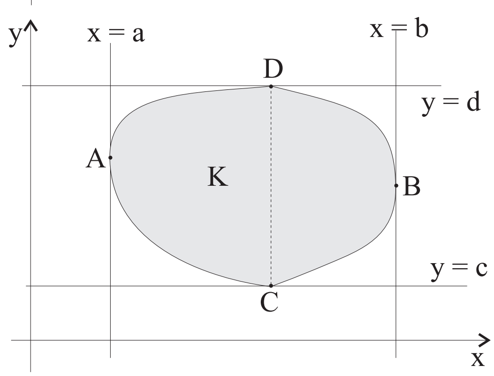
- *Elementární množina vzhledem k proměnné y* je množina tvaru

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \in [c, d],\ \varphi(y) \le x \le \psi(y)\},$$

kde φ a ψ jsou funkce jedné reálné proměnné spojité na $[c, d]$ takové, že pro všechna $y \in (c, d)$ platí $\varphi(y) < \psi(x)$.



- *Elementární množina* je uzavřená množina, kterou lze vyjádřit jako sjednocení konečně mnoha disjunktních elementárních množin vzhledem k x nebo y.



Poznámka: Někdy máme více možností jakým způsobem integrační obor rozdělit na elementární množiny vzhledem k x nebo y. Stanovení funkcí f a g, resp. φ a ϕ je pro daný integrační obor velmi důležité, neboť tyto funkce budou mezemi dvojnásobného integrálu. Při určování těchto funkcí je užitečné nakreslit si obrázek.

Věta 4.3 (Fubiniova pro měřitelnou množinu)

- *Nechť je funkce f spojitá na uzavřené elementární množině K vzhledem k proměnné x, tj. $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; a \le x \le b, g(x) \le y \le h(x)\}$. Potom platí*

$$\iint_K f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

- *Nechť je funkce f spojitá na uzavřené elementární množině K vzhledem k proměnné y, tj. $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; c \le y \le d, \varphi(x) \le x \le \psi(x)\}$. Potom platí*

$$\iint_K f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

Poznámka: Pro výpočet je důležité správné určení mezí. Pořadí integrace na elementární množině je třeba volit tak, aby meze v posledním integrálu byly konstanty.

5 Geometrické aplikace dvojného integrálu

Věta 5.1 *Nechť $K \subset \mathbb{R}^2$ je rovinná oblast (obrazec). Potom plocha K je dána vztahem*

$$\mu(K) = \iint_K dx\,dy.$$

Věta 5.2 *Nechť f je spojitá funkce na množině $K \subset \mathbb{R}^2$ a nechť $f(x,y) \ge 0$ pro všechna $(x,y) \in K$. Potom objem kolmého válce $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ohraničeného zdola množinou K v rovině (xy) a shora částí grafu funkce f je roven*

$$v(\Omega) = \iint_K f(x,y)\,dx\,dy$$

Věta 5.3 *Nechť jsou funkce f, f'_x a f'_y spojité funkce na množině $K \subset \mathbb{R}^2$. Potom obsah plochy P tvořené grafem funkce f nad množinou K je roven*

$$S(P) = \iint_K \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}\,dx\,dy$$

6 Substituce ve dvojném integrálu

Dále budeme uvažovat pouze takové množiny v rovině, které jsou souvislé a jejichž hranice je uzavřená křivka, která se nikde neprotíná a kterou můžeme popsat konečným počtem hladkých funkcí jedné proměnné (tj. funkcí, které jsou spojité a mají spojité první derivace).

V praxi se setkáváme téměř jen s množinami, které mají tyto vlastnosti. Jsou to mj. čtverec, mnohoúhelník (i křivočarý), vnitřek elipsy, kruh, mezikruží apod.

Některé množiny ale nejsou příliš vhodné jako integrační obory a proto se používá tzv. *transformace souřadnic.* Místo původní množiny používáme vhodnější transformovanou množinu.

Věta 6.1 (Transformace souřadnic ve dvojném integrálu) *Nechť se uzavřená omezená množina $N \subset \mathbb{R}^2$ (proměnných u, v) zobrazí pomocí soustavy rovnic*

$$x = g(u,v) \qquad \text{a} \qquad y = h(u,v)$$

vzájemně jednoznačně na uzavřenou omezenou množinu $M \subset \mathbb{R}^2$ *(proměnných* x, y*), přičemž funkce* g *a* h *jsou v* N *spojité spolu se svými parciálními derivacemi* $\frac{\partial g}{\partial u}$, $\frac{\partial g}{\partial v}$, $\frac{\partial h}{\partial u}$ *a* $\frac{\partial h}{\partial v}$ *a pro tzv. Jacobiův determinant (jakobián) platí*

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \\ \\ \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

ve všech bodech množiny N*. Dále nechť funkce* $f = f(x, y)$ *je spojitá na* M*. Potom platí*

$$\int\int_M f(x,y)\,dxdy = \int\int_N f(g(u,v), h(u,v)) \cdot |J|\,dudv\,,$$

kde $|J|$ *je absolutní hodnota jakobiánu.*

Jednou z nejčastějších transformací je transformace dvojného integrálu z kartézských do **polárních souřadnic**, kde příslušné převodní rovnice mají tvar

$$x = \rho\cos\varphi \qquad \text{a} \qquad y = \rho\sin\varphi \qquad\qquad (PS)$$

(Místo u a v se u této transformace tradičně používají proměnné s označením ρ a φ.)

Jakobián této transformace má potom tvar

$$J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \rho > 0$$

všude kromě počátku (pólu). Potom platí

$$\int\int_M f(x,y)\,dxdy = \int\int_N f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) \cdot \rho \quad d\rho\,d\varphi$$

V některých případech je lepší použít tzv. **zobecněné polární souřadnice**

$$x = a\,\rho\cos\varphi \qquad \text{a} \qquad y = b\,\rho\sin\varphi \qquad\qquad (zPS)$$