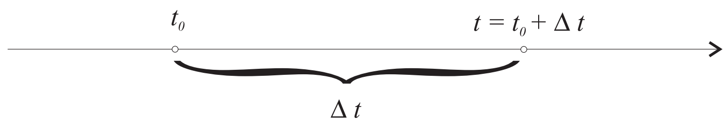
Obsah

5 Derivace funkce

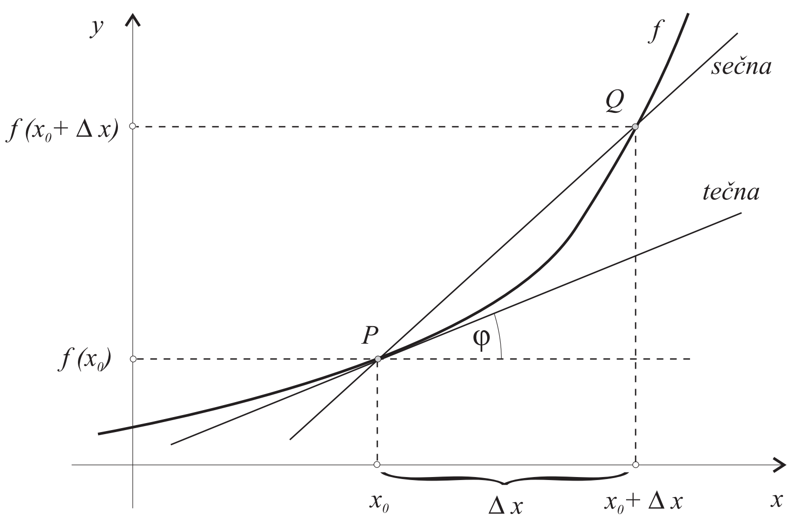
5.1 Motivace

- Úloha o okamžité rychlosti (fyzikální motivace, I. Newton)
  Nechť je přímočarý pohyb hmotného bodu zadán funkcí f; hodnota $f(t)$ pak vyjadřuje polohu bodu v čase t.



  Za dobu $\Delta t = t - t_0$ urazí bod dráhu $\Delta s = f(t) - f(t_0) = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$. Průměrnou rychlost lze pak určit jako
$$\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$
  Okamžitou rychlost v_0 hmotného bodu v čase t_0 potom získáme tak, že určíme limitu $\overline{v}$ pro $\Delta t \to 0$:
$$v_0 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$

- Úloha o tečně (geometrická motivace, W. Leibniz)
  Úkolem je určit směrnici tečny ke grafu funkce f v bodě $P = (x_0, f(x_0))$. Přímka (tečna) je dána bodem P a směrnicí ($= \operatorname{tg} \varphi$).



  Směrnice sečny procházející body P a $Q = (x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ je dána vztahem
$$k_s = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$
  (tj. jako tangens úhlu, který tato sečna svírá s kladným směrem osy x). Pro $\Delta x \to 0$ se bod Q "blíží" po grafu funkce f k bodu P a tedy $k_s \to k_t$, kde k_t je směrnice hledané tečny:
$$k_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

5.2 Derivace funkce v bodě

Definice 5.1 Nechť je funkce f definovaná na nějakém okolí bodu $x_0 \in D_f$. Existuje-li limita

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

pak se tato limita nazývá *derivace funkce f v bodě x_0* a značí se nejčastěji jako $f'(x_0)$, $\frac{df(x_0)}{dx}$ nebo $\frac{df}{dx}(x_0)$. Existuje-li $f'(x_0)$, říkáme, že *funkce f má v bodě x_0 derivaci.*

Poznámka: Je-li derivace rovna ∞ nebo $-\infty$, nazývá se *nevlastní derivace v bodě.* Jinak se nazývá (*vlastní*) *derivace.*
Poznámka: Jestliže položíme $x = x_0 + h$, potom pro $h \to 0$ dostáváme $x \to x_0$ a derivaci můžeme vyjádřit ve tvaru

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Definice 5.2

- Nechť f je definována na nějakém pravém okolí bodu $x_0 \in D_f$. Existuje-li limita

  $$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

  nazývá se *derivace funkce f v bodě x_0 zprava* a značí se nejčastěji jako $f'_+(x_0)$.

- Nechť f je definována na nějakém levém okolí bodu $x_0 \in D_f$. Existuje-li limita

  $$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

  nazývá se *derivace funkce f v bodě x_0 zleva* a značí se nejčastěji jako $f'_-(x_0)$.

- Derivace zprava a zleva v bodě x_0 se souhrnně nazývají *jednostranné derivace v bodě x_0.*

Věta 5.1 *Funkce f má v bodě x_0 derivaci právě tehdy, když má v bodě x_0 obě jednostranné derivace, pro které navíc platí $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.*

Věta 5.2 (Vztah mezi spojitostí a derivací v bodě) *Má-li funkce f v bodě x_0 vlastní derivaci, potom je v bodě x_0 spojitá.*

Poznámka: Obrácená Věta neplatí. Předpoklad existence *vlastní* derivace je nutný.

5.3 Tečna a normála ke grafu funkce

Věta 5.3 (Tečna) *Nechť f je spojitá v bodě x_0 a nechť má v bodě x_0 derivaci (vlastní nebo nevlastní). Potom má graf funkce f v bodě $T = (x_0, f(x_0))$ tečnu danou rovnicí*

- $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, *pokud je $f'(x_0)$ vlastní,*
- $x = x_0$, *pokud je $f'(x_0)$ nevlastní.*

Poznámka: Jestliže f není v x_0 spojitá nebo v x_0 neexistuje derivace, potom v bodě T neexistuje tečna.

Věta 5.4 (Normála) *Nechť f je spojitá v bodě x_0 a nechť má v bodě x_0 derivaci (vlastní nebo nevlastní). Potom rovnice normály ke grafu funkce f v bodě $T = (x_0, f(x_0))$ je*

- $y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$, *pokud je $f'(x_0)$ vlastní nenulová,*
- $x = x_0$, *pokud $f'(x_0) = 0$,*
- $y = f(x_0)$, *pokud $f'(x_0) = \pm\infty$.*

Poznámka: Tečna existuje právě tehdy, když existuje normála (v daném bodě T).

5.4 Derivace funkce na množině

Definice 5.3 Nechť je funkce f definovaná na $D_f \subset \mathbb{R}$. Nechť $D_{f'} \subset D_f$ je množina všech bodů, v nichž má f vlastní derivaci. Je-li $D_{f'} \neq \emptyset$, potom funkci $f' : D_{f'} \to R$, která každému $x \in D_{f'}$ přiřadí reálné číslo $f'(x)$, nazýváme *derivací funkce* f. Definičním oborem funkce f' je $D_{f'}$.

Poznámka:

- Funkce f' se také značí jako $\frac{df}{dx}$, $\frac{d(f(x))}{dx}$, $D_x f$ aj.
- Uvažujeme-li pouze $f' : M \subset D_{f'} \to \mathbb{R}$, říkáme, že funkce f má derivaci f' na množině M.
- Je-li $M =< a, b >$, říkáme, že funkce f má derivaci na M, má-li vlastní derivaci na (a, b), vlastní derivaci zprava v bodě a a vlastní derivaci zleva v bodě b.

Poznámka: f' je funkce, $f'(x_0)$ je číslo.

Věta 5.5 *Má-li funkce f na množině $M \subset \mathbb{R}$ derivaci, pak je f na M spojitá.*

Definice 5.4 Funkce f se nazývá *hladká na množině* M, jestliže její derivace f' je na M spojitá.

Poznámka: Je-li f' spojitá na M, znamená to, že existuje vlastní derivace $f'(x_0)$ v každém bodě $x_0 \in M$. Tzn., že v každém bodě existuje tečna a graf funkce f nemá "hroty".

5.5 Derivace elementárních funkcí

Věta 5.6 *Nechť funkce f a g mají vlastní derivace na množině M. Potom mají na M vlastní drivace také funkce $f \pm g$, $f \cdot g$ a $\frac{f}{g}$ (poslední pouze pro $g(x) \neq 0$) a platí*

$$\begin{aligned}
(f \pm g)'(x) &= f'(x) \pm g'(x) \\
(f \cdot g)'(x) &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \\
\left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}
\end{aligned}$$

Věta 5.7 (Derivace složené funkce)
Nechť g má vlastní derivaci v bodě x_0 ($\in D_g$) a nechť funkce f má vlastní derivaci v bodě $y_0 = g(x_0)$ ($\in D_f$). Potom složená funkce $f \circ g$ má vlastní derivaci v bodě x_0 a platí

$$(f \circ g)'(x_0) = \big(f(g(x))\big)'_{x=x_0} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0) = f'(y_0) \cdot g'(x_0)$$

Věta 5.8 (Derivace inverzní funkce)
Nechť je funkce f spojitá a ryze monotonní na nějakém $\mathcal{U}(x_0)$, kde $x_0 \in D_f$ a $f'(x_0) \neq 0$. Potom existuje derivace inverzní funkce f^{-1} v bodě $y_0 = f(x_0)$ a platí

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

5.5.1 Vzorce pro derivaci základních elementárních funkcí

$$
\begin{array}{rcll}
(a)' &=& 0 & a \in \mathbb{R} \\
(x^n)' &=& n \cdot x^{n-1} & n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R} \\
(x^\alpha)' &=& \alpha \cdot x^{\alpha-1} & \alpha \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^+ \\
(e^x)' &=& e^x & x \in \mathbb{R} \\
(a^x)' &=& a^x \cdot \ln a & a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\},\ x \in \mathbb{R} \\
(\ln x)' &=& \frac{1}{x} & x \in \mathbb{R}^+ \\
(\log_a x)' &=& \frac{1}{x \cdot \ln a} & a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\},\ x \in \mathbb{R}^+ \\
(\sin x)' &=& \cos x & x \in \mathbb{R} \\
(\cos x)' &=& -\sin x & x \in \mathbb{R} \\
(\operatorname{tg} x)' &=& \frac{1}{\cos^2 x} & x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\} \\
(\operatorname{cotg} x)' &=& -\frac{1}{\sin^2 x} & x \in \mathbb{R} \setminus \{k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\} \\
(\arcsin x)' &=& \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & x \in (-1, 1) \\
(\arccos x)' &=& -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & x \in (-1, 1) \\
(\operatorname{arctg} x)' &=& \frac{1}{1+x^2} & x \in \mathbb{R} \\
(\operatorname{arccotg} x)' &=& -\frac{1}{1+x^2} & x \in \mathbb{R} \\
(\sinh x)' &=& \cosh x & x \in \mathbb{R} \\
(\cosh x)' &=& \sinh x & x \in \mathbb{R} \\
(\operatorname{tgh} x)' &=& \frac{1}{\cosh^2 x} & x \in \mathbb{R} \\
(\operatorname{cotgh} x)' &=& -\frac{1}{\sinh^2 x} & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}
\end{array}
$$

5.5.2 Výpočet derivací

Pro výpočet derivací se používají věty o derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí, věty o derivaci složené a inverzní funkce a znalost derivací základních elementárních funkcí.

Pro derivaci funkcí tvaru $f(x)^{g(x)}$ $(f(x) > 0)$ se používá tzv. *logaritmická derivace funkce*. Zde musíme použít následují přepis

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$$

a v tomto tvaru pak derivovat podle výše uvedených pravidel:

$$\left(f(x)^{g(x)}\right)' = \left(e^{g(x) \cdot \ln f(x)}\right)' = e^{g(x) \cdot \ln f(x)} \cdot \left(g(x) \cdot \ln f(x)\right)' =$$

$$= e^{g(x) \cdot \ln f(x)} \cdot \left(g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)\right) = e^{g(x) \cdot \ln f(x)} \cdot \left(g'(x) \cdot \ln f(x) + \frac{g(x) \cdot f'(x)}{f(x)}\right)$$

5.6 Derivace vyšších řádů

Definice 5.5

1. Vlastní derivace funkce f definovaná na $D_{f'} \neq \emptyset$, $D_{f'} \subset D_f$ se nazývá *první derivace funkce f* nebo *derivace prvního řádu funkce f*.

2. Nechť $D_{f''} \subset D_{f'}$ je neprázdná množina všech bodů, v nichž má funkce f' vlastní derivaci. Potom se funkce f'', která každému $x \in D_{f''}$ přiřadí číslo $(f')'(x)$, nazývá *druhá derivace funkce f* nebo *derivace druhého řádu funkce f*. Funkce f'' má definiční obor $D_{f''}$ a značí se také $f^{(2)}$ nebo $\frac{d^2 f}{dx^2}$.

3. Nechť $D_{f'''} \subset D_{f''}$ je neprázdná množina všech bodů, v nichž má funkce f'' vlastní derivaci. Potom se funkce f''', která každému $x \in D_{f'''}$ přiřadí číslo $(f'')'(x)$, nazývá *třetí derivace funkce f* nebo *derivace třetího řádu funkce f*. Funkce f''' má definiční obor $D_{f'''}$ a značí se také $f^{(3)}$ nebo $\frac{d^3 f}{dx^3}$.

...

n. Nechť $n \geq 2$ a nechť $D_{f^{(n)}} \subset D_{f^{(n-1)}}$ je neprázdná množina všech bodů, v nichž má funkce $f^{(n-1)}$ vlastní derivaci. Potom se funkce $f^{(n)}$, která každému $x \in D_{f^{(n-1)}}$ přiřadí číslo $(f^{(n-1)})'(x)$, nazývá *n-tá derivace funkce f* nebo *derivace n-tého řádu funkce f*. Funkce $f^{(n)}$ má definiční obor $D_{f^{(n)}}$ a značí se také $\frac{d^n f}{dx^n}$.

Definice 5.6 *Derivací n-tého řádu funkce f v bodě $x_0 \in D_{f^{(n)}}$* nazýváme funkční hodnotu funkce $f^{(n)}$ v bodě x_0.

Poznámka: Jinak lze derivaci n-tého řádu funkce f v bodě $x_0 \in D_{f^{(n)}}$ opět definovat pomocí limity, tj. jako

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0 + h) - f^{(n-1)}(x_0)}{h}.$$

Věta 5.9 (Leibnizovo pravidlo) *Nechť funkce f a g mají na množině M vlastní derivace až do n-tého řádu včetně, $n \in \mathbb{N}_0$. Potom na množině M platí tzv. Leibnizův vzorec pro výpočet n-té derivace součinu funkcí f a g, tj. platí*

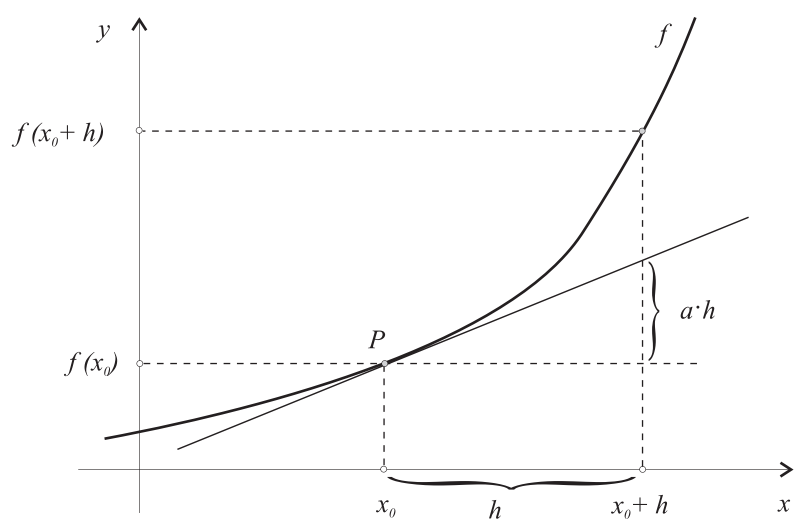
$$\big(f \cdot g\big)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) \cdot g^{(k)}(x)$$

Interpretace derivace druhého řádu

- Fyzikální interpretace
  $s = f(t) \ldots$ dráha hmotného bodu v čase t
  $v = f'(t) \ldots$ okamžitá rychlost v čase t
  $\frac{\Delta v}{\Delta t} \ldots$ průměrné zrychlení
  $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \ldots$ okamžité zrychlení, značí se $a(t)$
  tj. $a(t) = f''(t) \ldots$ okamžité zrychlení je druhá derivace dráhy
- Geometrická interpretace
  viz kapitola Průběh funkce

5.7 Diferenciál funkce

5.7.1 Diferenciál funkce v bodě



Definice 5.7 Nechť je funkce f definovaná na nějakém okolí $\mathcal{U}(x_0)$ bodu $x_0 \in D_f$. Existuje-li konstanta $a \in \mathbb{R}$ tak, že platí

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - a \cdot h}{h} = 0,$$

říkáme, že funkce f *má v bodě* x_0 *diferenciál.* Lineární funkce $a \cdot h$ (proměnné h) se nazývá *diferenciál funkce* f *v bodě* x_0 a značí se $df(x_0)$.

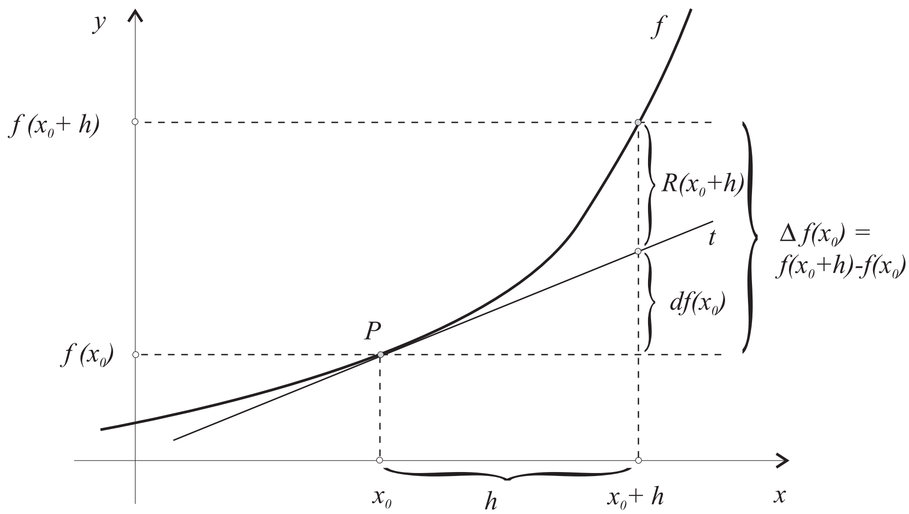
Věta 5.10 *Funkce f má v bodě x_0 diferenciál právě tehdy, když má v bodě x_0 vlastní derivaci.*

Poznámka: Diferenciál $df(x_0)$ je potom dán vztahem $df(x_0) = f'(x_0) \cdot h$.

Geometrická interpretace

Graf funkce f chceme v okolí bodu $P = (x_0, f(x_0))$ nahradit přímkou tak, aby obě funkce měly v bodě P stejnou tečnu $\Longrightarrow$ funkci f aproximujeme tečnou t, tj. přímkou o rovnici

$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$



Přírůstek funkce (diference) $\Delta f(x_0)$ není roven diferenciálu funkce f v x_0:

$$\Delta f(x_0) = f(x_0+h) - f(x_0) = df(x_0) + \underbrace{R(x_0+h)}_{chyba\,aproximace}, \quad \text{kde} \quad \lim_{h \to 0} \frac{R(x_0+h)}{h} = 0.$$

Potom lze přibližně počítat

$$f(x_0+h) \approx f(x_0) + df(x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$$

a po substituci $x = x_0 + h$ pak

$$f(x) \approx \underbrace{f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)}_{rovnice\,tečny\,v\,bodě\,P=(x_0,f(x_0)}.$$

To znamená, že v okolí bodu x_0 nahrazujeme skutečné funkční hodnoty funkce f funkčními hodnotami na tečně.

Poznámka: Při zápisu diferenciálu v bodě často proměnnou h značíme jako dx, tj. $df(x_0) = f'(x_0) \cdot dx$.

Definice 5.8 Nechť je množina $D_{f'}$ neprázdná. Potom se funkce $f'(x) \cdot dx$ dvou proměnných $x \in D_{f'}$ a $dx \in \mathbb{R}$ nazývá *diferenciál funkce* f a značí se df. Existuje-li diferenciál funkce f, říkáme, že funkce f *má diferenciál* df nebo že je *diferencovatelná* (na $D_{f'}$).

5.7.2 Diferenciály vyšších řádů

Definice 5.9

- Diferenciál funkce f se nazývá též *diferenciál prvního řádu* nebo *první diferenciál funkce* f. Značí se df nebo $d^1 f$.
- Nechť $D_{f''} \neq \emptyset$. Diferenciál prvního diferenciálu funkce f se nazývá *diferenciálem druhého řádu* nebo *druhým diferenciálem funkce* f. Značí se $d^2 f$, tj. $d^2 f = d(df)$.
- Nechť $n \geq 2$ a nechť $D_{f^{(n)}} \neq \emptyset$. Diferenciál diferenciálu $(n-1)$-ho řádu funkce f se nazývá *diferenciálem n-tého řádu* nebo *n-tým diferenciálem funkce* f. Značí se $d^n f$, tj. $d^n f = d(d^{(n-1)} f)$.

Definice 5.10 Existuje-li diferenciál n-tého řádu funkce f, pak říkáme, že funkce f *má diferenciál n-tého řádu* $d^n f$ nebo že je *n-krát diferencovatelná na* $D_{f^{(n)}}$.

Poznámka: Diferenciálem nultého řádu rozumíme samotnou funkci f, tj. $d^0 f = f$.

Věta 5.11 *Nechť $n \in \mathbb{N}_0$. Potom pro všechna $x \in D_{f^{(n)}}$ a všechna $dx \in \mathbb{R}$ platí*

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x) \cdot dx^n$$

(kde dx^n je zjednodušený zápis pro $(dx)^n$).

5.8 Základní věty diferenciálního počtu

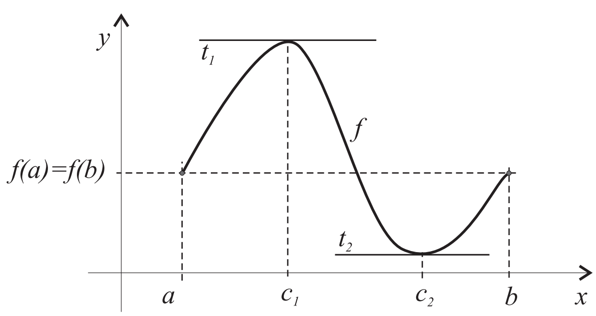
Věta 5.12 (Rolleova) *Nechť pro funkci f platí, že*

a) f je spojitá na intervalu $< a, b >$,

b) f má (vlastní nebo nevlastní) derivaci na intervalu (a, b),

c) $f(a) = f(b)$.

Potom existuje alespoň jeden bod $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = 0$.



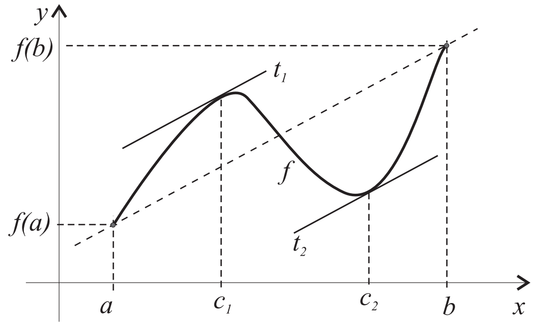
Věta 5.13 (Lagrangeova, o střední hodnotě, o přírůstku funkce) *Nechť pro funkci f platí, že*

a) f je spojitá na intervalu $< a, b >$,

b) f má (vlastní nebo nevlastní) derivaci na intervalu (a, b).

Potom existuje alespoň jeden bod $c \in (a, b)$ tak, že

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Věta 5.14 *Nechť f splňuje předpoklady Lagrangeovy věty a nechť navíc platí, že $f'(x) \neq 0$ pro všechna $x \in (a, b)$. Potom je funkce f prostá na intervalu $< a, b >$.*

Věta 5.15 *Funkce f je konstantní na (a, b) právě tehdy, když $f'(x) = 0$ pro všechna $x \in (a, b)$.*

Věta 5.16 (Cauchyova, zobecněná věta o střední hodnotě) *Nechť pro funkce f a g platí, že*

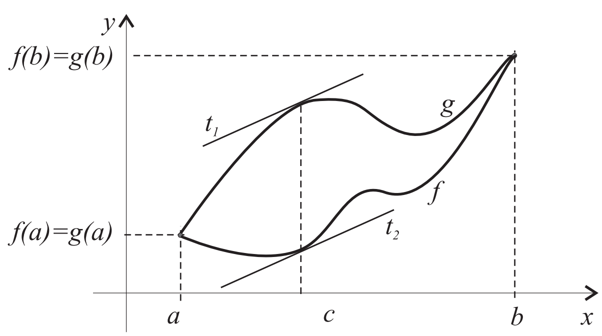
a) f a g jsou spojité na intervalu $< a, b >$,

b) f a g mají derivace na intervalu (a, b),

c) $g'(x)$ je vlastní a nenulová pro všechna $x \in (a, b)$.

Potom existuje alespoň jeden bod $c \in (a, b)$ tak, že

$$\frac{f'(c)}{g'(x)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$



5.9 L'Hospitalovo pravidlo

Věta 5.17 (L'Hospitalovo pravidlo) *Nechť funkce f a g mají vlastní derivace na nějakém $\mathcal{U}^*(c)$, kde $c \in \mathbb{R}^*$. Nechť dále platí*

1. *buď $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0$,*
   nebo $\lim_{x\to c} |g(x)| = \infty$ (o limitě $\lim_{x\to c} f(x)$ nepředpokládáme nic, ani její existenci)
2. *existuje limita (vlastní nebo nevlastní)* $\displaystyle\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Potom existuje také limita $\displaystyle\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ *a platí* $\displaystyle\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$

5.10 Aproximace funkce

Cílem je aproximovat danou funkci v okolí zvoleného bodu pomocí jednodušší funkce, v našem případě polynomem.

5.10.1 Diferenciál

Polynomem prvního stupně, který aproximuje funkci, byl diferenciál (viz výše).

5.10.2 Taylorův polynom, Taylorův vzorec

Lepší aproximaci získáme použitím polynomu vyššího stupně.

Definice 5.11 Polynom $P_n(x)$ nejvýše n-tého stupně daný vztahem

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

se nazývá *Taylorův polynom n-tého stupně funkce f v bodě c.*

Poznámka: Pokud zvolíme $c = 0$, potom $P_n(x)$ má tvar

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-c)^k$$

a nazývá se *Maclaurinův polynom n-tého stupně funkce f.*

Věta 5.18 (Taylorova) *Nechť funkce f má na nějakém $\mathcal{U}(c)$ derivace až do řádu $(n+1)$ včetně, kde $n \in \mathbb{N}_0$. Potom na $\mathcal{U}(c)$ platí Taylorův vzorec, tj.*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + R_n(x)$$

se zbytkem $R_n(x)$, který lze vyjádřit

a) v Lagrangeově tvaru

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

b) v Cauchyově tvaru

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-c)$$

kde bod ξ leží mezi body x a c (přitom $\xi \neq x$ a $\xi \neq c$), tj. $\xi = c + t \cdot (x-c)$, $t \in (0,1)$.

6 Aplikace diferenciálního počtu - průběh funnkce

6.1 Monotonie

Věta 6.1 *Nechť má funkce f derivaci na otevřeném intervalu $I = (a, b)$. Potom platí*

a) je-li $f'(x) > 0\ \forall x \in I$, pak je f rostoucí na intervalu I;

b) je-li $f'(x) < 0\ \forall x \in I$, pak je f klesající na intervalu I;

c) je-li $f'(x) = 0\ \forall x \in I$, pak je f konstantní na intervalu I;

d) $f'(x) \geq 0\ \forall x \in I \iff f$ je neklesající na intervalu I;

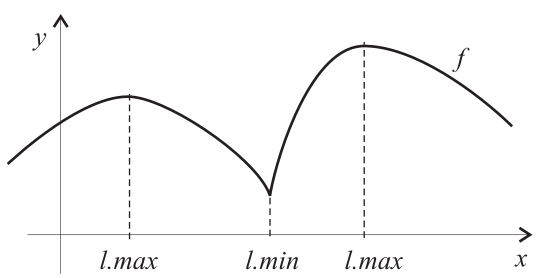
e) $f'(x) \leq 0\ \forall x \in I \iff f$ je nerostoucí na intervalu I.

Definice 6.1 Funkce f se nazývá $\begin{pmatrix} \textit{rostoucí} \\ \textit{klesající} \\ \textit{nerostoucí} \\ \textit{neklesající} \end{pmatrix}$ *v bodě $x_0 \in D_f$*, jestliže existuje $\mathcal{U}^*(x_0) \subset D_f$ tak, že $\begin{pmatrix} f(x) < f(x_0) \\ f(x) > f(x_0) \\ f(x) \geq f(x_0) \\ f(x) \leq f(x_0) \end{pmatrix}$ na $\mathcal{U}^*_-(x_0)$ a $\begin{pmatrix} f(x) > f(x_0) \\ f(x) < f(x_0) \\ f(x) \leq f(x_0) \\ f(x) \geq f(x_0) \end{pmatrix}$ na $\mathcal{U}^*_+(x_0)$.

6.2 Lokální extrémy funkce

Definice 6.2

- Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in D_f$ *lokální maximum*, jestliže existuje $\mathcal{U}^*(x_0)$ takové, že $f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in \mathcal{U}^*(x_0) \cap D_f$.
- Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in D_f$ *lokální minimum*, jestliže existuje $\mathcal{U}^*(x_0)$ takové, že $f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in \mathcal{U}^*(x_0) \cap D_f$.
- Jestliže místo neostrých nerovností lze psát ostré, mluvíme o *ostrém lokálním maximu* a *ostrém lokálním minimu.*
- (Ostré) lok. maximum a (ostré) lok. minimum se souhrnně nazývají (*ostré*) *lokální extrémy.*



Věta 6.2 (Nutná podmínka existence lok. extrému) *Nechť má funkce f derivaci v bodě $x_0 \in D_f$. Má-li funkce f v bodě x_0 lokální extrém, potom $f'(x_0) = 0$.*

Důsledek: Jestliže $f'(x_0) \neq 0$, pak f nemá v x_0 lok. extrém.

Definice 6.3 Bod $x_0 \in D_f$ se nazývá *stacionárním bodem funkce f*, jestliže existuje $f'(x_0)$ a platí $f'(x_0) = 0$.

Věta 6.3 (Postačující podmínka existence lok. extrému) *Nechť f je spojitá v bodě $x_0 \in D_f$ a nechť má f derivaci na nějakém $\mathcal{U}^*(x_0) \subset D_f$. Potom platí:*

- *Jestliže $f'(x) > 0$ na $\mathcal{U}_-^*(x_0)$ a $f'(x) < 0$ na $\mathcal{U}_+^*(x_0)$, potom má f v bodě x_0 ostré lokální maximum.*

- *Jestliže $f'(x) < 0$ na $\mathcal{U}_-^*(x_0)$ a $f'(x) > 0$ na $\mathcal{U}_+^*(x_0)$, potom má f v bodě x_0 ostré lokální minimum.*

Věta 6.4 (Postačující podmínka existence lok. extrému) *Nechť x_0 je stacionárním bodem funkce f a nechť existuje $f''(x_0)$ a platí $f''(x_0) \neq 0$. Potom má funkce f v x_0 ostrý lokální extrém; navíc*

- *je-li $f''(x_0) > 0$, má f v bodě x_0 ostré lokální minimum,*

- *je-li $f''(x_0) < 0$, má f v bodě x_0 ostré lokální maximum.*

Poznámka: Body podezřelé z lokálního extrému jsou body, v nichž je derivace nulová a body, v nichž derivace neexistuje.

6.3 Globální extrémy funkce

Definice 6.4 Říkáme, že *funkce f má v bodě $x_0 \in D_f$ globální maximum* (resp. *minimum*), jestliže $f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in D_f$ (resp. $f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in D_f$).

Existence globálních extrémů: Weierstrassova věta
Nalezení globálních extrémů funkce spojité na $< a, b >$:

1. najdeme body "podezřelé z globálních extrémů"

   a) stacionární body na (a, b)

   b) body z (a, b), v nichž neexistuje derivace

   c) krajní body intervalu $< a, b >$, tj. body a a b

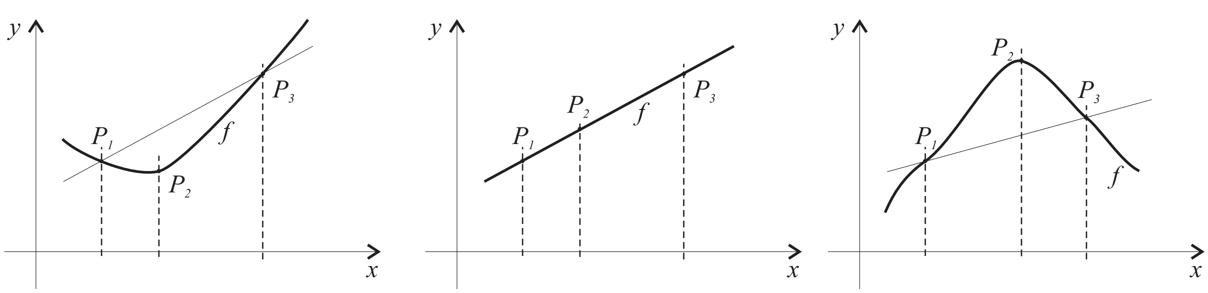
2. určíme funkční hodnoty v podezřelých bodech

3. vybereme z nich největší ($\rightarrow$ glob. maximum) a nejmenší ($\rightarrow$ glob. minimum) hodnotu

6.4 Konvexnost a konkávnost, inflexní body

Definice 6.5 Říkáme, že funkce f je *konvexní* (resp. *konkávní*) *na intervalu $I \subset D_f$*, jestliže pro každé tři body $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$ platí, že bod $P_2 = (x_2, f(x_2))$ leží buď pod (resp. nad) spojnicí bodů $p_1 = (x_1, f(x_1))$ a $P_3 = (x_3, f(x_3))$ nebo na ní.

Leží-li P_2 pod (resp. nad) spojnicí P_1 a P_3, nazývá se funkce f *ryze konvexní* (resp. *ryze konkávní*) na I.



Věta 6.5 *Nechť má funkce f vlastní derivaci na intervalu $I \subset D_f$. Potom*

- *f je konvexní na I $\iff$ graf funkce f leží na intervalu I nad tečnou sestrojenou v libovolném bodě $P = (x_0, f(x_0))$, $x_0 \in I$, nebo na ní*

- *f je konkávní na I $\iff$ graf funkce f leží na intervalu I pod tečnou sestrojenou v libovolném bodě $P = (x_0, f(x_0))$, $x_0 \in I$, nebo na ní*

Věta 6.6 *Nechť f je spojitá na intervalu $I \subset D_f$ a má na I (vlastní nebo nevlastní) druhou derivaci. Potom platí*

a) f *je konvexní na* $I \quad \Longleftrightarrow \quad f''(x) \geq 0 \;\forall x \in I$

b) $f''(x) > 0 \;\forall x \in I \quad \Longrightarrow \quad f$ *je ryze konvexní na* I

c) f *je konkávní na* $I \quad \Longleftrightarrow \quad f''(x) \leq 0 \;\forall x \in I$

b) $f''(x) < 0 \;\forall x \in I \quad \Longrightarrow \quad f$ *je ryze konkávní na* I

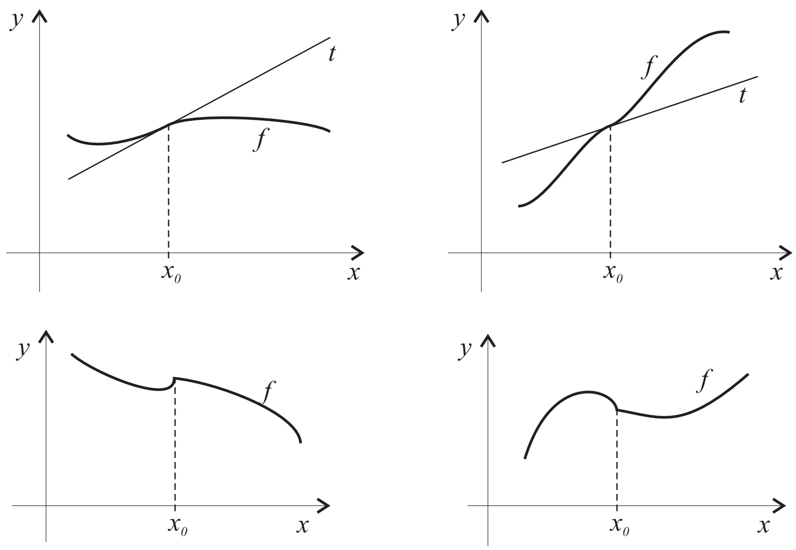
Definice 6.6 Nechť f má v bodě $x_0 \in D_f$ vlastní derivaci. Říkáme, že f *má v* x_0 *inflexi*, jestliže existuje $\mathcal{U}^*(x_0) \subset D_f$ tak, že

$$f(x) > \underbrace{f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)}_{\text{rovnice tečny v } (x_0, f(x_0))} \qquad \forall x \in \mathcal{U}^*_-(x_0) \text{ a}$$

$$f(x) > \overbrace{f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)} \qquad \forall x \in \mathcal{U}^*_+(x_0)$$

nebo naopak.

Bod $(x_0, f(x_0))$ se nazývá *inflexní bod funkce* f.



Věta 6.7 (Nutná podmínka existence inflexe) *Nechť má funkce f v bodě $x_0 \in d_f$ inflexi a nechť existuje (vlastní nebo nevlastní) $f''(x_0)$. Potom $f''(x_0) = 0$.*

Věta 6.8 (Postačující podmínka existence inflexe) *Nechť má funkce f spojitou první derivaci v bodě $x_0 \in d_f$ a nechť existuje $\mathcal{U}^*(x_0)$ takové, že $\forall x \in \mathcal{U}^*(x_0)$ existuje $f''(x)$. Mění-li funkce f'' při průchodu bodem x_0 znaménko, má funkce f v bodě x_0 inflexi. Nemění-li f'' při průchodu x_0 znaménko, f nemá v x_0 inflexi.*

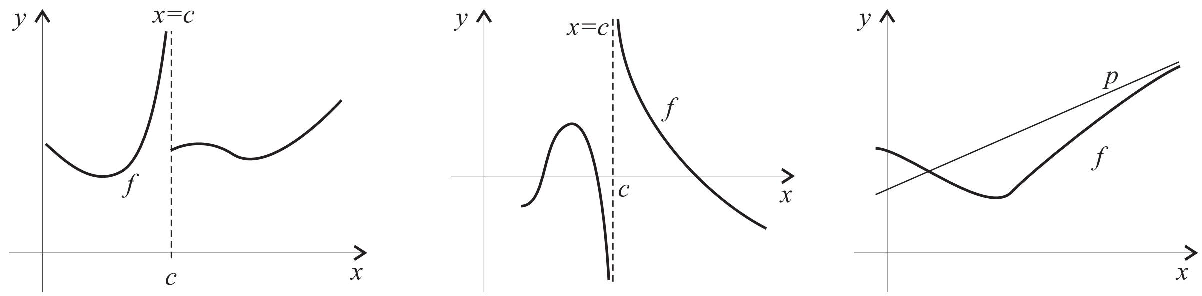
Věta 6.9 (Postačující podmínka existence inflexe) *Nechť má funkce f v bodě $x_0 \in D_f$ derivaci druhého řádu a nechť $f''(x_0) = 0$. Jestliže $f'''(x_0) \neq 0$, pak má funkce f v x_0 inflexi.*

Poznámka: Body podezřelé z inflexe jsou body, v nichž je druhá derivace nulová a body, v nichž druhá derivace neexistuje.

6.5 Asymptoty grafu funkce

Definice 6.7 Nechť je f definovaná alespoň v jednom jednostranném redukovaném okolí bodu $c \in \mathbb{R}$. Má-li funkce f v bodě c alespoň jednu jednostrannou limitu nevlastní, pak se přímka daná rovnicí $x = c$ nazývá *vertikální asymptota* (nebo *asymptota bez směrnice*) grafu funkce f.

Poznámka: Vertikální asymptoty mohou být pouze v hromadných bodech D_f, které jsou body nespojitosti druhého druhu.



Definice 6.8 Nechť je f definovaná na okolí nevlastního bodu ∞ (resp. $-\infty$). Existuje-li přímka $p : y = kx + q$, $k, q \in \mathbb{R}$, taková, že

$$\lim_{x\to\infty} \big(f(x) - (kx+q)\big) = 0 \qquad \text{(resp. } \lim_{x\to-\infty} \big(f(x) - (kx+q)\big) = 0 \text{),}$$

Pak se tato přímka p nazývá *asymptota se směrnicí v nevlastním bodě* ∞ (resp. $-\infty$).

Věta 6.10 *Přímka $p : y = kx + q$, $k, q \in \mathbb{R}$, je asymptotou grafu funkce f v bodě ∞ (resp. $-\infty$) právě tehdy, když*

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad \text{a} \qquad q = \lim_{x\to\infty} \big(f(x) - kx\big)$$

$$\text{(resp. } k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad \text{a} \qquad q = \lim_{x\to-\infty} \big(f(x) - kx\big) \text{).}$$

6.6 Postup při vyšetřování průběhu funkce

1. D_f a základní vlastnosti (sudost/lichost, periodičnost, nulové body, kladnost/zápornost)
2. Spojitost, body nespojitosti, vertikální asymptoty a asymptoty se směrnicí
3. Derivace f', $D_{f'}$, intervaly monotomie, lokální extrémy
4. Druhá derivace f'', $D_{f''}$, intervaly konvexnosti a konkávnosti, inflexní body
5. Graf funkce f