1. Určete definiční obory následujících funkcí:

(i) $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$

Řešení: $x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2 \Rightarrow \underline{D_f = \mathbb{R} - \{2\}}$.

(ii) $f(x) = \frac{8x^3-x}{x^2-18x+80}$

Řešení: $x^2 - 18x + 80 \neq 0 \Rightarrow (x-8)(x-10) \neq 0 \Rightarrow x \neq 8 \wedge x \neq 10 \Rightarrow \underline{D_f = \mathbb{R} - \{8, 10\}}$.

(iii) $f(x) = \frac{1}{x^3-x^2-9x+9}$

Řešení: $x^3 - x^2 - 9x + 9 \neq 0 \Rightarrow x^2(x-1) - 9(x-1) \neq 0 \Rightarrow (x-1)(x^2-9) \neq 0 \Rightarrow (x-1)(x-3)(x+3) \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \wedge x \neq \pm 3 \Rightarrow \underline{D_f = \mathbb{R} - \{1, 3, -3\}}$.

(iv) $f(x) = \frac{1-x^2}{x^3-2x^2-5x+6}$

Řešení: $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \neq 0 \Rightarrow (x-1)(x^2-x-6) \neq 0 \Rightarrow (x-1)(x+2)(x-3) \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \wedge x \neq -2 \wedge x \neq 3 \Rightarrow \underline{D_f = \mathbb{R} - \{1, -2, 3\}}$.

(v) $f(x) = \sqrt{2x-7}$

Řešení: $2x - 7 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{7}{2} \Rightarrow \underline{D_f = [\frac{7}{2}, \infty)}$.

(vi) $f(x) = \sqrt{27 - x^3}$

Řešení: $27 - x^3 \geq 0 \Rightarrow (3-x)(9+3x+x^2) \geq 0$. Protože výraz $9 + 3x + x^2$ je kladný pro všechna $x \in \mathbb{R}$, musí platit $3 - x \geq 0$, tj. $x \leq 3$. Tedy $\underline{D_f = (-\infty, 3]}$.

(vii) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{2-5x-3x^2}}$

Řešení: $2 - 5x - 3x^2 > 0 \Rightarrow -3\left(x^2 + \frac{5}{3}x - \frac{2}{3}\right) > 0 \Rightarrow 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x+2) < 0 \Rightarrow$
$x \in \left(-2, \frac{1}{3}\right) \Rightarrow \underline{D_f = \left(-2, \frac{1}{3}\right)}$.

(viii) $f(x) = \sqrt{\frac{2x+3}{x-4}}$

Řešení: $\frac{2x+3}{x-4} \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -\frac{3}{2}] \cup (4, \infty)$.

(ix) $f(x) = \sqrt{x^3 - x} + \sqrt{25 - x^2}$

Řešení: $x^3 - x \geq 0 \wedge 25 - x^2 \geq 0$.
Z první podmínky dostáváme:

$$x(x^2-1) \geq 0 \Rightarrow x(x-1)(x+1) \geq 0 \Rightarrow x \in [-1, 0] \cup [1, \infty).$$

Z druhé podmínky plyne:

$$x^2 \leq 25 \Rightarrow |x| \leq 5 \Rightarrow x \in [-5, 5].$$

Celkově tedy $x \in [-1, 0] \cup [1, 5] \Rightarrow \underline{D_f = [-1, 0] \cup [1, 5]}$.

(x) $f(x) = \sqrt{5^x - 125}$

Řešení: $5^x - 125 \geq 0 \Rightarrow 5^x \geq 125 \Rightarrow 5^x \geq 5^3$.
Protože funkce $g(x) = 5^x$ je rostoucí na celém svém definičním oboru, platí $x \geq 3 \Rightarrow \underline{D_f = [3, \infty)}$.

(xi) $f(x) = \sqrt{0,25^x - 16}$

Řešení: $0,25^x - 16 \geq 0 \Rightarrow 0,25^x \geq 16 \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^x \geq 4^2 \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^x \geq \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$. Protože funkce $h(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ je klesající na celém svém definičním oboru, platí $x \leq -2$. Tedy $\underline{D_f = (-\infty, -2]}$.

(xii) $f(x) = \log_4(x^2 - 3x)$

Řešení: $x^2 - 3x > 0 \Rightarrow x(x-3) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (3, \infty) \Rightarrow \underline{D_f = (-\infty, 0) \cup (3, \infty)}$.

(xiii) $f(x) = \ln \frac{x+2}{4x-6}$

Řešení: $\frac{x+2}{4x-6} > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -2) \cup \left(\frac{3}{2}, \infty\right) \Rightarrow \underline{D_f = (-\infty, -2) \cup \left(\frac{3}{2}, \infty\right)}$.

(xiv) $f(x) = \frac{1}{\ln(4x-7)}$

Řešení: $\ln(4x-7) \neq 0 \ \wedge \ 4x - 7 > 0$.
První podmínka: $\ln(4x-7) \neq 0 \Rightarrow \ln(4x-7) \neq \ln 1 \Rightarrow 4x - 7 \neq 1 \Rightarrow 4x \neq 8 \Rightarrow x \neq 2$.
Druhá podmínka: $x > \frac{7}{4}$.
Tedy $\underline{D_f = \left(\frac{7}{4}, 2\right) \cup (2, \infty)}$.

(xv) $f(x) = \frac{1}{\log_2(x+4) - 3}$

Řešení: $\log_2(x+4) - 3 \neq 0 \ \wedge \ x + 4 > 0$.
Z první podmínky plyne $\log_2(x+4) \neq 3 \Rightarrow \log_2(x+4) \neq \log_2 8$. Odlogaritmováním obou stran nerovnosti dostáváme $x + 4 \neq 8 \Rightarrow x \neq 4$.
Z druhé podmínky plyne $x > -4$.
Celkově tedy $\underline{D_f = (-4, 4) \cup (4, \infty)}$.

(xvi) $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(2x+5)}$

Řešení: $\log_{\frac{1}{3}}(2x+5) \geq 0 \ \wedge \ 2x + 5 > 0$.
Z první podmínky dostáváme $\log_{\frac{1}{3}}(2x+5) \geq \log_{\frac{1}{3}} 1$. Protože základ logaritmu je menší než 1, platí $2x + 5 \leq 1 \Rightarrow x \leq -2$.
Současně z druhé podmínky plyne $x > -\frac{5}{2}$, takže celkově $\underline{D_f = (-\frac{5}{2}, -2]}$.

(xvii) $f(x) = \frac{x+1}{1+\sin x}$

Řešení: $1 + \sin x \neq 0 \Rightarrow \sin x \neq -1 \Rightarrow x \neq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.
Tedy

$$\underline{D_f = \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \right\}}.$$

(xviii) $f(x) = \frac{\sin x}{4\cos^2 x - 3}$

Řešení: $4\cos^2 x - 3 \neq 0 \Rightarrow \cos^2 x \neq \frac{3}{4} \Rightarrow \cos x \neq \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$; $k \in \mathbb{Z}$.
Tedy

$$\underline{D_f = \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \right\}}.$$

(xix) $f(x) = \frac{x - \sin x}{2\cos^2 x + 3\sin x}$

Řešení: $2\cos^2 x + 3\sin x \neq 0 \Rightarrow 2(1 - \sin^2 x) + 3\sin x \neq 0 \Rightarrow 2\sin^2 x - 3\sin x - 2 \neq 0.$
Substitucí $\sin x = t$ vyřešíme kvadratickou rovnici $2t^2 - 3t - 2 = 0$. Její kořeny jsou $t_1 = 2, t_2 = -\frac{1}{2}$. První kořen nevyhovuje, z druhého dostáváme:

$$x_1 = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi, \quad x_2 = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}.$$

Tedy

$$\underline{D_f = \mathbb{R} - \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{ \frac{7}{6}\pi + 2k\pi, \frac{11}{6}\pi + 2k\pi \right\}}.$$

(xx) $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{2\sin x - \sqrt{3}}}$

Řešení: $2\sin x - \sqrt{3} > 0 \Rightarrow \sin x > \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x \in \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2}{3}\pi + 2k\pi\right);\ k \in \mathbb{Z}.$
Tedy

$$\underline{D_f = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \right)}.$$

(xxi) $f(x) = \ln \tan x$

Řešení: $\tan x > 0\ \wedge x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right);\ k \in \mathbb{Z}.$
Z první podmínky plyne $x \in \left(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right); k \in \mathbb{Z}$, celkově tedy

$$\underline{D_f = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right)}.$$

(xxii) $f(x) = \frac{2x - 1}{\sqrt{3x - |x+2|}}$

Řešení: $3x - |x + 2| > 0.$
Je-li $x \geq -2 \Rightarrow 3x - x - 2 > 0 \Rightarrow x > 1$,
je-li $x < -2 \Rightarrow 3x + x + 2 > 0 \Rightarrow x > -\frac{1}{2}$.
Průnikem těchto dvou intervalů je interval $(1, \infty)$, takže $\underline{D_f = (1, \infty)}$.

(xxiii) $f(x) = \arccos(3 - 8x)$

Řešení: $-1 \leq 3 - 8x \leq 1.$
Obě nerovnice vyřešíme současně, dostaneme tak $-4 \leq -8x \leq -2 \Rightarrow \frac{1}{2} \geq x \geq \frac{1}{4}$, tedy $\underline{D_f = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]}$.

(xxiv) $f(x) = \arcsin \frac{1 - 5x}{6}$

Řešení: $-1 \leq \frac{1-5x}{6} \leq 1.$
Stejně jako v předchozím příkladě budeme řešit obě nerovnice současně:
$-6 \leq 1 - 5x \leq 6 \Rightarrow -7 \leq -5x \leq 5 \Rightarrow \frac{7}{5} \geq x \geq -1$, tedy $\underline{D_f = [-1, \frac{7}{5}]}$.

(xxv) $f(x) = \arccos \frac{x - 3}{2x}$

Řešení: $-1 \leq \frac{x-3}{2x} \leq 1.$
Pro $x > 0$ násobíme v obou nerovnostech kladným výrazem $2x$, takže máme $-2x \leq x - 3 \leq 2x$. Vyřešíme každou nerovnost zvlášť:
$-2x \leq x - 3 \Rightarrow -3x \leq -3 \Rightarrow x \geq 1$,
$x - 3 \leq 2x \Rightarrow x \geq -3$.

Celkově tedy $x > 0 \land x \geq 1 \land x \geq -3 \Rightarrow x \geq 1$.
V případě $x < 0$ má výraz $2x$ zápornou hodnotu, proto při násobení tímto výrazem musíme převrátit znaménka v obou nerovnostech na opačná. Dostaneme
$-2x \geq x - 3 \geq 2x$. Opět vyřešíme každou nerovnost zvlášť:
$-2x \geq x - 3 \Rightarrow x \leq 1$,
$x - 3 \geq 2x \Rightarrow x \leq -3$.
Celkově $x < 0 \land x \leq 1 \land x \leq -3 \Rightarrow x \leq -3$. Tedy $\underline{D_f = (-\infty, -3] \cup [1, \infty)}$.

(xxvi) $f(x) = \arctan\sqrt{x^2 - 9} + \ln(5 - x)$
Řešení: $x^2 - 9 \geq 0 \land 5 - x > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -3] \cup [3, \infty) \land x < 5 \Rightarrow$

$$\underline{D_f = (-\infty, -3] \cup [3, 5).}$$

(xxvii) $f(x) = \ln[\ln(x - 3)] + \arcsin\frac{x-5}{2}$
Řešení: $\ln(x - 3) > 0 \land -1 \leq \frac{x-5}{2} \leq 1$.
Z první podmínky dostáváme $\ln(x - 3) > \ln 1 \Rightarrow x - 3 > 1 \Rightarrow x > 4$,
z druhé pak $-2 \leq x - 5 \leq 2 \Rightarrow 3 \leq x \leq 7 \Rightarrow$
Tedy $\underline{D_f = (4, 7]}$.

(xxviii) $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{3+\ln x} - 2}$
Řešení: $\sqrt{3 + \ln x} - 2 \neq 0 \land 3 + \ln x \geq 0 \land x > 0$.
Z první podmínky plyne $\sqrt{3 + \ln x} \neq 2$, což po umocnění dává $3 + \ln x \neq 4 \Rightarrow \ln x \neq 1 \Rightarrow x \neq e$.
Z druhé podmínky máme $\ln x \geq -3 \Rightarrow x \geq \frac{1}{e^3}$.
Celkově

$$\underline{D_f = \left[\frac{1}{e^3}, e\right) \bigcup (e, \infty) .}$$

(xxix) $f(x) = \arccos(\ln x) + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
Řešení: $-1 \leq \ln x \leq 1 \land x > 0 \land x^2 - 1 > 0$.
Z první podmínky vyplývá $\ln\frac{1}{e} \leq \ln x \leq \ln e \Rightarrow \frac{1}{e} \leq x \leq e \Rightarrow x \in \left[\frac{1}{e}, e\right]$, ze třetí $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$,
takže celkově

$$\underline{D_f = (1, e].}$$