Základní elementární funkce

Za základní elementární funkce považujeme funkce:
a) exponenciální a logaritmické;
b) obecné mocninné;
c) goniometrické a cyklometrické;
d) hyperbolické a hyperbolometrické.

1 Exponenciální a logaritmické funkce

1. Definice **Exponenciální funkce** je funkce $f(x) = a^x, a \in \mathbf{R}$, $a > 0, x \in \mathbf{R}$.

Podívejme se, jak se jednotlivé fukce liší v závislosti na exponentu x:

a) $x = n$, kde $n \in \mathbf{N}$: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-\text{krát}}$.

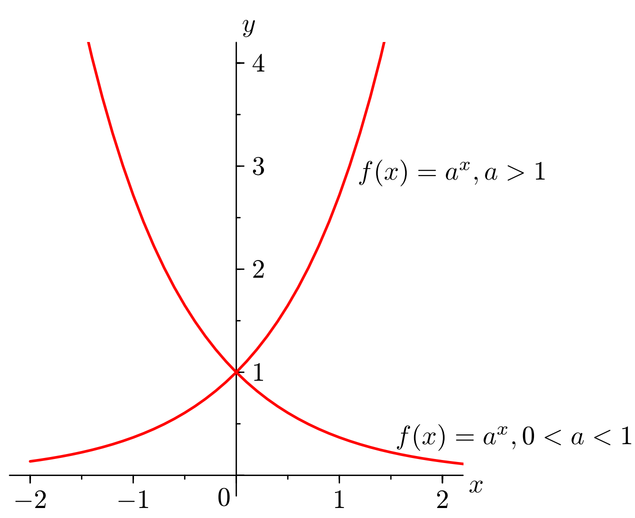
b) $x = 0$: $a^0 = 1$.

c) $x = -n$, kde $n \in \mathbf{Z}$: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

d) $x = \frac{p}{q}$, kde $\frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$: $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$.

e) $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$: Zde je problém. Jak definovat například $a^\pi, a^{-\sqrt{2}}, \ldots$?
Pro libovolné $x \in \mathbf{R}$ existuje posloupnost $\{x_n\}$ racionálních čísel taková, že $x_n \to x$. Pak existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = \alpha, \alpha > 0$, která nezávisí na volbě posloupnosti $\{x_n\}$. Potom definujeme $a^x = \alpha$.

f) Jen pro úplnost doplňme přehled o případ, kdy $a = 1$. Potom $a^x = 1$ pro $\forall x \in \mathbf{R}$.



Obrázek 1: Exponenciální funkce $f(x) = a^x$

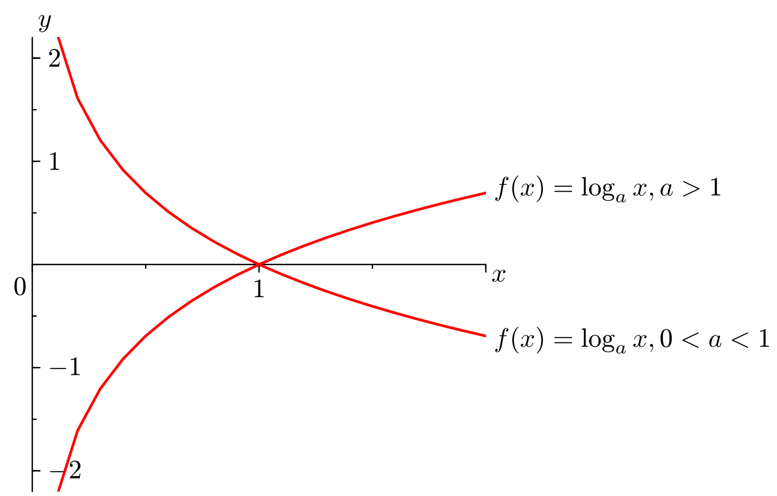
2. Věta (**Vlastnosti exponenciální funkce**)
Nechť $a \in \mathbf{R}$, $a > 0, a \neq 1$. Potom má exponenciální funkce $f(x) = a^x$ tyto vlastnosti:

1) Pro $x, y \in \mathbf{R}$ platí:
   $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$,
   $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$,
   $(a^x)^y = a^{xy}$.
2) $D(f) = \mathbf{R}$, $H(f) = (0, \infty)$ (viz Obrázek 1).
3) f je rostoucí pro $a > 1$, klesající pro $0 < a < 1$ (viz Obrázek 1).

3. Poznámka Speciálním případem je **přirozená exponenciální funkce** $f(x) = \mathrm{e}^x$.
Užívá se i značení $f(x) = \exp(x)$.

4. Definice Nechť $a \in \mathbf{R}$, $a > 0, a \neq 1$. Inverzní funkce k $f(x) = a^x$ se nazývá **logaritmická funkce o základu** a. Značí se $f(x) = \log_a x$.

5. Poznámka Následující rovnosti jsou tedy ekvivalentní: $y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$.



Obrázek 2: Logaritmická funkce $f(x) = \log_a x$

6. Věta (**Vlastnosti logaritmické funkce**)
Nechť $a \in \mathbf{R}$, $a > 0, a \neq 1$. Potom má logaritmická funkce $f(x) = \log_a x$ tyto vlastnosti:

1) $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$,
   $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$,
   $\log_a x^y = y \log_a x$,
   $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$.

b) $D(f) = (0, \infty), H(f) = \mathbf{R}$ (viz Obrázek 2).

c) f je rostoucí pro $a > 1$, klesající pro $0 < a < 1$ (viz Obrázek 2).

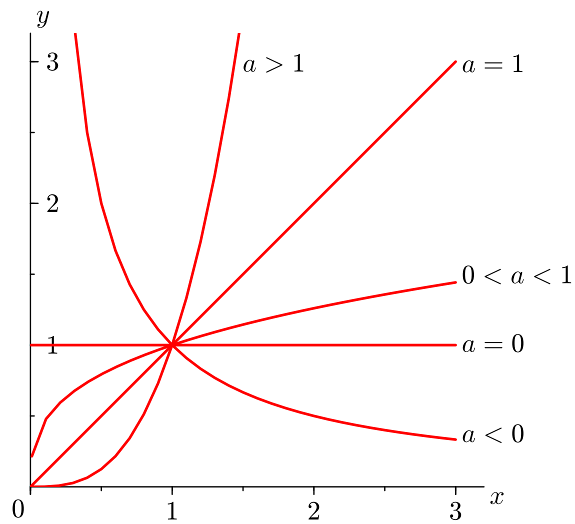
7. Poznámka Speciální případy:
1. $a = \mathrm{e}$, značíme $\log_{\mathrm{e}} x = \ln x$ ... **přirozená logaritmická funkce**
2. $a = 10$, značíme $\log_{10} x = \log x$ ... **dekadická logaritmická funkce**

8. Věta Pro libovolné $a \in \mathbf{R}$, $a > 0, x \in \mathbf{R}$ platí $a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$.

Důkaz: $\mathrm{e}^{x \ln a} = \left(\mathrm{e}^{\ln a}\right)^x = a^x$.

2 Obecné mocninné funkce

9. Definice Nechť $a \in \mathbf{R}$. Funkce $f(x) = x^a$ definovaná vztahem $x^a = \mathrm{e}^{a \ln x}$ se nazývá **obecná mocninná funkce.**



Obrázek 3: Obecná mocninná funkce $f(x) = x^a$

10. Věta (**Vlastnosti obecných mocninných funkcí**)
Nechť $a \in \mathbf{R}$. Potom má obecná mocninná funkce $f(x) = x^a$ tyto vlastnosti:

1) $(xy)^a = x^a \cdot y^a$,
$\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}$,

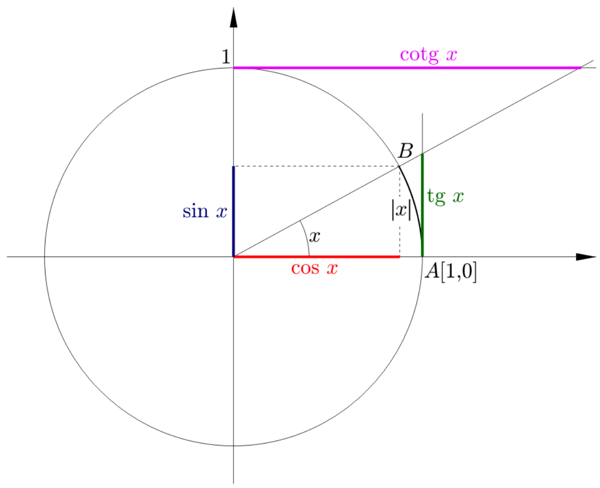
b) $D(f) = H(f) = (0, \infty)$ (viz Obrázek 3).

c) f je rostoucí pro $a > 0$, klesající pro $a < 0$ (viz Obrázek 3).

d) V některých speciálních případech má funkce definiční obor širší než $(0, \infty)$.
Např. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ má $D(f) = \mathbf{R}$.

3 Goniometrické funkce a cyklometrické funkce

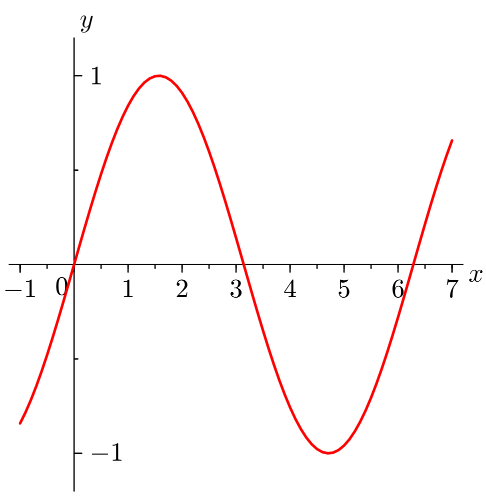
11. Definice **Goniometrické funkce** úhlu x v intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ definujeme pomocí jednotkové kružnice (viz Obrázek 4) takto:
Značí-li B bod na jednotkové kružnici, který obdržíme tak, že na tuto kružnici naneseme od bodu $A[1,0]$ oblouk délky $|x|$ v kladném směru (tj. proti směru oběhu hodinových ručiček) pro $x \geq 0$, resp. v záporném směru (tj. po směru oběhu hodinových ručiček) pro $x \leq 0$, tak první souřadnici bodu B prohlásíme za $\cos x$ a druhou souřadnici za $\sin x$. Tedy $B[\cos x, \sin x]$.



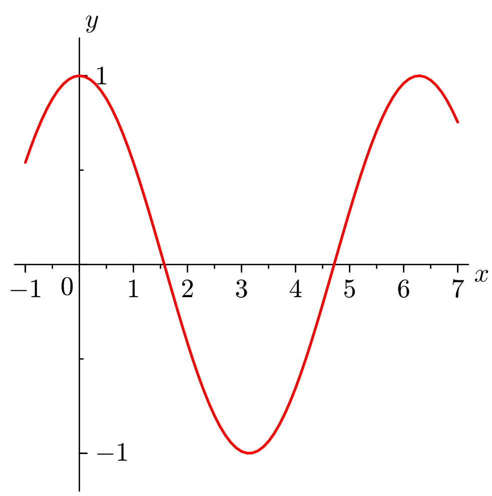
Obrázek 4: Jednotková kružnice

Z Obrázku 4 lze vyčíst i hodnoty dalších goniometrických funkcí úhlu x, tj. tg x a cotg x, které je také možno vyjádřit vztahy:

$$\mathrm{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \mathrm{cotg}\, x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$



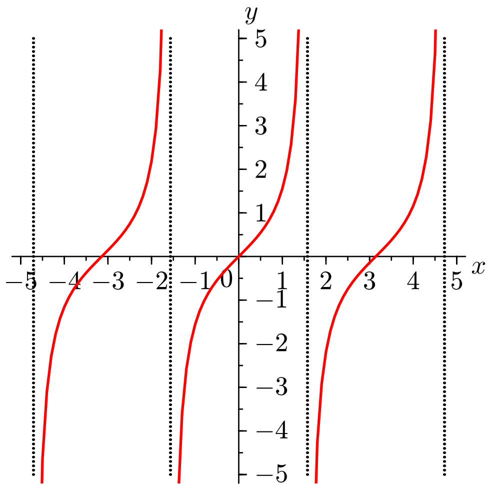
Obrázek 5: $f(x) = \sin x$



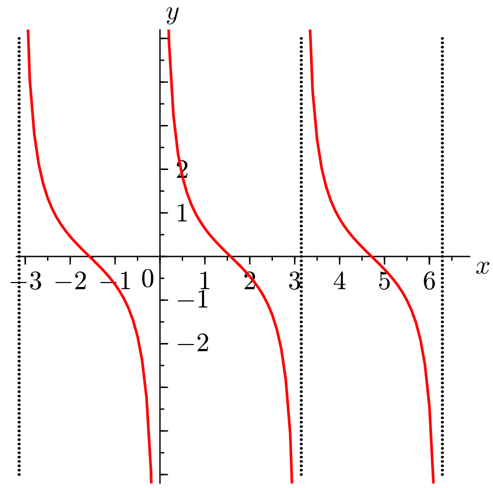
Obrázek 6: $f(x) = \cos x$

12. Poznámka Úhel x může být zadán ve stupňové nebo v obloukové míře. Připomeňme si vzájemnou vazbu: $180^o = \pi$, $1^o = \frac{\pi}{180}, \ldots$

Tedy hovoříme-li o oblouku délky $|x|$, například pro $x = -30^o = -\frac{\pi}{6}$, nanášíme na jednotkovou kružnici od bodu $A[1,0]$ délku $\frac{\pi}{6} \doteq 0{,}523$ v záporném směru a získáme tak bod $B\left[\cos(-\frac{\pi}{6}), \sin(-\frac{\pi}{6})\right] = \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right]$.



Obrázek 7: $f(x) = \text{tg } x$



Obrázek 8: $f(x) = \text{cotg } x$

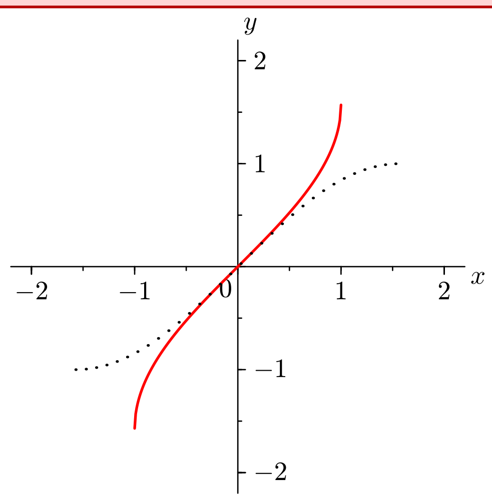
13. Věta (**Vlastnosti goniometrických funkcí**)

1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$ připomeňme, že platí: $\sin^2 x = (\sin x)^2$,
$\text{tg } x \cdot \text{cotg } x = 1,$
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x,$
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$

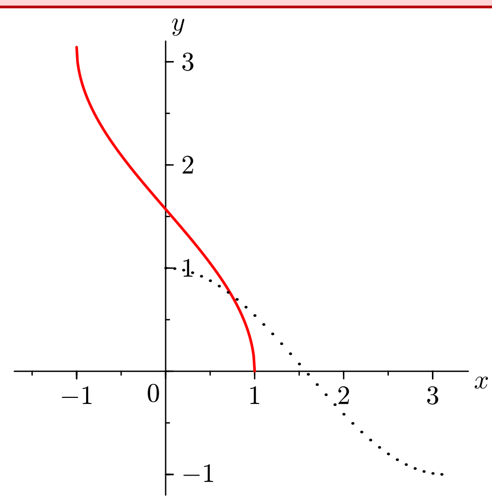
b) $D(\sin x) = D(\cos x) = \mathbf{R}$, $H(\sin x) = H(\cos x) = \langle -1, 1 \rangle$ (viz Obrázky 5 a 6).

c) $D(\text{tg } x) = \mathbf{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\right\}$, $D(\text{cotg } x) = \mathbf{R} - \{k\pi, k \in Z\}$,
$H(\text{tg } x) = H(\text{cotg } x) = \mathbf{R}$ (viz Obrázky 7 a 8).

14. Definice **Cyklometrické funkce** jsou funkce inverzní k funkcím goniometrickým. Ve všech případech musíme zúžit definiční obor původní goniometrické funkce na interval, ve kterém je prostá:
$\sin x$ je prostá na $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$, inverzní funkci značíme $\arcsin x$,
$\cos x$ je prostá na $\langle 0, \pi \rangle$, inverzní funkci značíme $\arccos x$,
$\text{tg } x$ je prostá na $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, inverzní funkci značíme $\text{arctg } x$,
$\text{cotg } x$ je prostá na $(0, \pi)$, inverzní funkci značíme $\text{arccotg } x$.



Obrázek 9: $f(x) = \arcsin x$



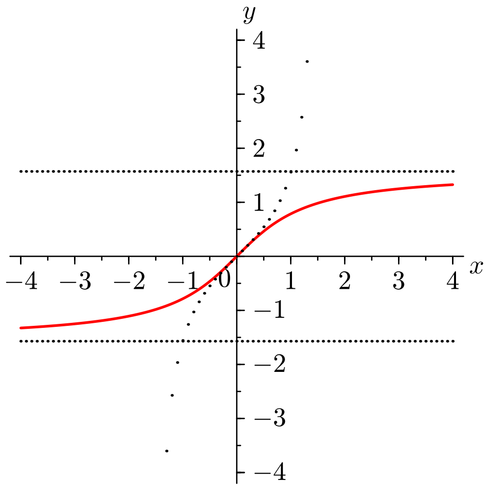
Obrázek 10: $f(x) = \arccos x$

15. Poznámka Pro $x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ jsou rovnosti $y = \arcsin x$ a $x = \sin y$ ekvivalentní.
Pro další goniometrické a cyklometrické funkce platí analogické vztahy.

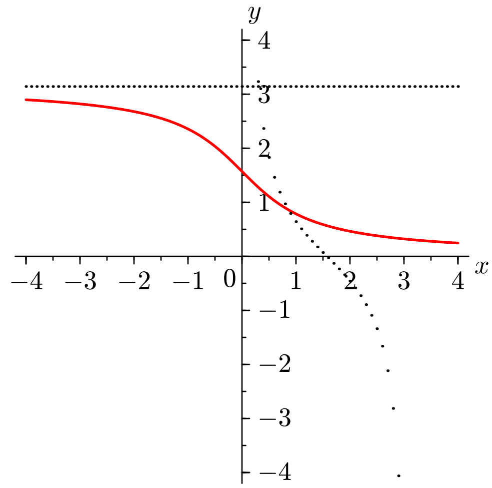
16. Věta (**Vlastnosti cyklometrických funkcí**)

a) Pro $x \in \langle -1, 1 \rangle$ platí $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$,
pro $x \in \mathbf{R}$ platí $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$.

b) $D(\arcsin x) = D(\arccos x) = \langle -1, 1 \rangle$,
$H(\sin x) = \left\langle \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$, $H(\arccos x) = \langle 0, \pi \rangle$ (viz Obrázky 9 a 10),
$D(\operatorname{arctg} x) = D(\operatorname{arccotg} x) = \mathbf{R}$,
$H(\operatorname{arctg} x) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$, $H(\operatorname{arccotg} x) = (0, \pi)$ (viz Obrázky 11 a 12).



Obrázek 11: $f(x) = \operatorname{arctg} x$



Obrázek 12: $f(x) = \operatorname{arccotg} x$

Připomínky k textu a případná upozornění na chyby můžete zaslat na adresu: hoderova@fme.vutbr.cz