

1. Vypočtete diferenciál $df(x)$ pro funkci $f(x) = \arctan \frac{1}{x}$, $h \in \mathbb{R}$.

Řešení:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{1 + x^2},$$

$$df(x) = f'(x)h = -\frac{1}{1 + x^2}h.$$

2. Vypočtete přírůstek funkce $f(x_0 + h) - f(x_0)$ a diferenciál funkce $df(x_0)$, je-li $f(x) = x^2 - 3x + 4$, $x_0 = 1$, $h = -0,2$.

Řešení:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f(0,8) - f(1) = (0,8^2 - 3 \cdot 0,8 + 4) - (1^2 - 3 \cdot 1 + 4) = 2,24 - 2 = 0,24.$$

$$df(x_0) = f'(x_0)h = (2x_0 - 3)h = (2 \cdot 1 - 3) \cdot (-0,2) = 0,2.$$

3. Užitím diferenciálu vypočtete přibližně

a) $2,03^5$,

b) $\cos 59^\circ$.

Řešení:

- a) Použijeme vzorec $f(x) \doteq f(x_0) + df(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Máme

$$f(x) = x^5, x_0 = 2, x - x_0 = h = 0,03,$$

$$f(x_0) = f(2) = 2^5 = 32, f'(x) = 5x^4, f'(x_0) = f'(2) = 5 \cdot 2^4 = 80.$$

$$\text{Aplikujeme diferenciál: } 2,03^5 \doteq 32 + 80 \cdot 0,03 = 32 + 2,4 = 34,4.$$

Přesná hodnota je po zaokrouhlení 34,473.

- b) $f(x) = \cos x$, $x_0 = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$, $x - x_0 = h = -1^\circ = -\frac{\pi}{180}$,

$$f(x_0) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, f'(x) = -\sin x, f'(x_0) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\cos 59^\circ \doteq \frac{1}{2} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(-\frac{\pi}{180}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0,0174 \doteq 0,5151.$$

Přesná hodnota je po zaokrouhlení 0,515.

4. Napište Taylorův polynom 5. stupně se středem v bodě $x_0 = 1$ pro funkci

$$f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 6x + 5.$$

Řešení: Taylorův polynom stupně n funkce $f(x)$ se středem v bodě x_0 má tvar

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

$$f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 6x + 5,$$

$$f'(x) = 5x^4 - 12x^3 + 6x^2 + 8x - 6,$$

$$f''(x) = 20x^3 - 36x^2 + 12x + 8,$$

$$f'''(x) = 60x^2 - 72x + 12,$$

$$f^{(4)}(x) = 120x - 72,$$

$$f^{(5)}(x) = 120.$$

Pro $x_0 = 1$ máme

$$f(1) = 3, f'(1) = 1, f''(1) = 4, f'''(1) = 0, f^{(4)}(1) = 48, f^{(5)}(1) = 120.$$

Dosazením do vzorce dostáváme

$$\begin{aligned} T_5(x) &= 3 + \frac{1}{1!}(x - 1) + \frac{4}{2!}(x - 1)^2 + \frac{0}{3!}(x - 1)^3 + \frac{48}{4!}(x - 1)^4 + \frac{120}{5!}(x - 1)^5 \\ &= 3 + (x - 1) + 2(x - 1)^2 + 2(x - 1)^4 + (x - 1)^5. \end{aligned}$$

5. Napište Taylorův polynom 4. stupně se středem v bodě $x_0 = -1$ pro funkci $f(x) = \frac{1}{x}$.

Řešení:

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{x^3}, \quad f'''(x) = -\frac{6}{x^4}, \quad f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5}.$$

Pro $x_0 = -1$:

$$f(-1) = -1, \quad f'(-1) = -1, \quad f''(-1) = -2, \quad f'''(-1) = -6, \quad f^{(4)}(-1) = -24.$$

$$\begin{aligned} T_4(x) &= -1 + \frac{-1}{1!}(x+1) + \frac{-2}{2!}(x+1)^2 + \frac{-6}{3!}(x+1)^3 + \frac{-24}{4!}(x+1)^4 \\ &= -1 - (x+1) - (x+1)^2 - (x+1)^3 - (x+1)^4. \end{aligned}$$

6. Napište Taylorův polynom 3. stupně se středem v bodě $x_0 = 0$ pro funkci $f(x) = e^{\cos x}$.

Řešení:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\cos x}, \\ f'(x) &= (-\sin x) \cdot e^{\cos x}, \\ f''(x) &= (-\cos x) \cdot e^{\cos x} + (-\sin x) \cdot e^{\cos x} \cdot (-\sin x) = e^{\cos x} (\sin^2 x - \cos x), \\ f'''(x) &= e^{\cos x} \cdot (-\sin x) \cdot (\sin^2 x - \cos x) + e^{\cos x} \cdot (2 \sin x \cos x + \sin x) \\ &= e^{\cos x} (-\sin^3 x + 3 \sin x \cos x + \sin x) = e^{\cos x} \sin x (-\sin^2 x + 3 \cos x + 1). \end{aligned}$$

Pro $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned} f(0) &= e^0 = 1, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = -1, \quad f'''(0) = 0. \\ T_3(x) &= 1 + \frac{0}{1!}(x-0) + \frac{-1}{2!}(x-0)^2 + \frac{0}{3!}(x-0)^3 = 1 - \frac{x^2}{2}. \end{aligned}$$

7. Napište Taylorův polynom 3. stupně se středem v bodě $x_0 = 0$ pro funkci $f(x) = \arctan x$.

Řešení:

$$\begin{aligned} f(x) &= \arctan x, \\ f'(x) &= \frac{1}{1+x^2}, \\ f''(x) &= -(1+x^2)^{-2} \cdot 2x = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, \\ f'''(x) &= \frac{-2 \cdot (1+x^2)^2 - (-2x) \cdot 2 \cdot (1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{-2(1+x^2)(1+x^2-4x^2)}{(1+x^2)^4} \\ &= \frac{-2(1-3x^2)}{(1+x^2)^3}. \end{aligned}$$

Pro $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -2. \\ T_3(x) &= 0 + \frac{1}{1!}(x-0) + \frac{0}{2!}(x-0)^2 + \frac{-2}{3!}(x-0)^3 = x - \frac{1}{3}x^3. \end{aligned}$$