Derivace funkce

1. Příklad Zderivujte bez úpravy (takže ten, kdo zderivovaný výraz upraví, to má špatně):

a) $f(x) = \frac{5x^2}{\sqrt[5]{x}} + 30\sqrt[15]{x} + \frac{6}{\sqrt[3]{x}}$,

b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2\sqrt{x^4\sqrt{x^3}}}$,

c) $f(x) = \frac{x^3+2x^2-1}{x^4+2}$,

d) $f(x) = (5x^4 - 3x^3 + 2x - 11)^6$,

e) $f(x) = \sqrt[4]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt{x}}}$,

f) $f(x) = \cos(5x + 3)$,

g) $f(x) = \sin^2(3x + 5)$,

h) $f(x) = \sin^3(x^5)$,

i) $f(x) = \operatorname{tg}(x^2 + 1)$,

j) $f(x) = \sin(\sin(\sin x))$,

k) $f(x) = \sin^3(\cos^2(\operatorname{tg} x))$,

l) $f(x) = \frac{\cos^2 x}{\cos x^2}$,

m) $f(x) = x\sin^2(x^3)\ln(x^2)$,

n) $f(x) = \sqrt{x\sin x\sqrt{1 - x^2}}$,

o) $f(x) = x^x$,

p) $f(x) = 3^{\ln x^2}$,

q) $f(x) = \ln\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$,

r) $f(x) = 10^{x\operatorname{tg} x}$,

s) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$,

t) $f(x) = \cos^2(x^3 - 2\sin x)$,

u) $f(x) = \ln(-x) + \mathrm{e}^{-x^2+\mathrm{e}^{-x}}$,

v) $f(x) = \left(\frac{x+3}{\sqrt{5}}\right)^2 + \mathrm{e}^{-5}$,

w) $f(x) = \sqrt[3]{\ln\operatorname{tg}\frac{x+3}{4}}$,

x) $f(x) = 2^{\frac{x}{\ln x}} + \mathrm{e}^{\sqrt{\ln x}}$,

y) $f(x) = 5^x \cdot x^5 \cdot \sin x$,

z) $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{5}}{2}} + (\sqrt{3})^x$,

zz) $f(x) = (x^x)^x$,

yy) $f(x) = (\sin x)^{\frac{x}{\ln x}}$,

xx) $f(x) = \sin(\sqrt{2})^3$,

ww) $f(x) = \log_2^2 x$.

2. Příklad Zderivujte a upravte:

a) $f(x) = x \cdot \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}} + \operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x}$,

b) $f'(x) = \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}$,

c) $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$,

e) $f(x) = \frac{1}{4}\ln\frac{x^2-1}{x^2+1}$,

f) $f'(x) = \frac{x}{x^4-1}$,

g) $f(x) = \sqrt{x+1} - \ln(1 + \sqrt{x+1})$,

h) $f'(x) = \frac{1}{2(1+\sqrt{x+1})}$,

i) $f(x) = \frac{1}{4}\ln\frac{2+2x}{2-2x}$,

j) $f'(x) = \frac{1}{2-2x^2}$,

k) $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$,

l) $f'(x) = -\frac{1}{\cos x}$,

m) $f(x) = \arcsin(\sin x - \cos x)$,

n) $f'(x) = \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\sin 2x}}$,

o) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$,
p) $f'(x) = -1$,
q) $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}$,
r) $f'(x) = \frac{x\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$,
s) $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}}}$,
t) $f'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{1-x}}$,
u) $f(x) = (x-2)\sqrt{1+e^x} - \ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}$,
v) $f'(x) = \frac{xe^x}{2\sqrt{1+e^x}}$,
w) $f(x) = \frac{-\cos x}{2\sin^2 x} + \ln\sqrt{\frac{1+\cos x}{\sin x}}$,
x) $f'(x) = \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}$,
y) $f(x) = \ln\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} + 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$,
z) $f'(x) = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

3. Příklad Určete 1000. derivaci funkcí:
a) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^3-x}$. *Výsledek:* $f^{(1000)}(x) = 1000!\left(\frac{1}{(x-1)^{1001}} + \frac{1}{(x+1)^{1001}} - \frac{1}{x^{1001}}\right)$.
b) $g(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$. *Výsledek:* $g^{(1000)}(x) = 1000!\left(\frac{1}{(x+1)^{1001}} - \frac{1}{(x+2)^{1001}}\right)$.

4. Příklad Napište rychle rovnici tečny ke křivce $y = f(x)$ v bodě A:
a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $A = [\frac{1}{2}, 2]$;
b) $f(x) = 2\sqrt{2}\sin x$, $A = [\frac{\pi}{4}, ?]$;
c) $f(x) = e^{-x}\cos 2x$, $A = [0, ?]$.

Výsledek: a) $4x + y - 4 = 0$, b) $2x - y + 2 - \frac{\pi}{2} = 0$, c) $x + y - 1 = 0$.

5. Příklad Určete úhel křivek $y = f(x)$ a $y = g(x)$:
a) $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$;
b) $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$.

Výsledek: a) $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \operatorname{arctg}\frac{1}{7}$, b) $\alpha = \operatorname{arctg}(2\sqrt{2})$

6. Příklad Určete úhel, pod kterým protíná graf funkce $f(x)$ osu x:
a) $f(x) = \sin x$;
b) $f(x) = \ln(x-1)$.

Výsledek: a) $\frac{\pi}{4}$, b) $\frac{\pi}{4}$.