VII. Číselné řady

Obsah

1 Základní pojmy a vlastnosti

Definice 1.1 Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Symbol

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

se nazývá *nekonečná řada reálných čísel* (stručně jen *nekonečná řada* nebo jen *řada*). Čísla a_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, se nazývají *členy řady*, a_n se pak nazývá *n-tý člen řady*; n se nazývá *sčítací index.*

Pokud nemůže dojít k mýlce, tak budeme místo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ psát zkráceně jen $\sum a_n$.

Definice 1.2 Uvažujme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ \ldots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \cdots a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \\ \ldots \end{aligned}$$

se nazývá *posloupnost částečných součtů* řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Dále jestliže

- $\lim_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$, pak říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje* a má součet s;
- $\lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$, pak říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje* (k $\pm\infty$) a má součet $\pm\infty$;
- $\lim_{n\to\infty} s_n$ neexistuje, pak říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje* (*osciluje*) a nemá součet.

Poznámka: U každé řady nastane právě jedna z výše uvedených možností.

1.1 Význačné řady

Definice 1.3 Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \big(a_1 + (n-1)d\big)$, kde $a_1, d \in \mathbb{R}$, se nazývá *aritmetická řada s prvním členem a_1 a diferencí d.*

n-tý částečný součet aritmetické řady je $s_n = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n)$
Jestliže je alespoň jedno z čísel a_1 a d různé od nuly, aritmetická řada diverguje; konverguje pouze v případě, že $a_1 = d = 0$.

Definice 1.4 Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1}$, kde $a_1, q \in \mathbb{R}$, se nazývá *geometrická řada s prvním členem a_1 a kvocientem q.*

n-tý částečný součet geometrické řady je $s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$ pro $q \neq 1$ a $s_n = n \cdot a_1$ pro $q = 1$.
Geometrická řada konverguje, jestliže

- $|q| < 1$ a má součet $s = a_1 \cdot \frac{1}{1-q}$
- $a_1 = 0$ ($q \in \mathbb{R}$ libovolné) a má součet 0

Geometrická řada diverguje pro $|q| \geq 1$ ($a_1 \neq 0$).

Definice 1.5 Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ se nazývá *harmonická řada.*

Harmonická řada diverguje k $+\infty$.

Definice 1.6 Řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ se nazývá *Grandiho řada.*

Grandiho řada osciluje.

1.2 Základní vlastnosti řad

Věta 1.1 (Nutná podmínka konvergence řady)
Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, pak* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Poznámka: Obrácená věta neplatí.

Definice 1.7 (Algebraické operace s řadami)

- *Součtem*, resp. *rozdílem řad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ rozumíme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n + b_n\big)$, resp. řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n - b_n\big)$.
- *Násobkem řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a čísla $c \in \mathbb{R}$ rozumíme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \big(c \cdot a_n\big)$.

Věta 1.2 *Nechť jsou dány dvě řady* $\sum a_n$ *a* $\sum b_n$. *Nechť existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tak, že* $a_n = b_n$ $\forall n \geq n_0$. *Pak obě řady buď konvergují nebo obě divergují.*

Věta 1.3 *Nechť jsou dány dvě konvergentní řady* $\sum a_n = a \in \mathbb{R}$ *a* $\sum b_n = b \in \mathbb{R}$ *a číslo* $c \in \mathbb{R}$. *Potom jsou konvergentní také řady* $\sum (a_n \pm b_n)$ *a* $\sum (c \cdot a_n)$ *a platí*

$$\begin{aligned} \sum (a_n \pm b_n) &= \sum a_n \pm \sum b_n = a \pm b \\ \sum (c \cdot a_n) &= c \cdot \sum a_n = c \cdot a \end{aligned}$$

Věta 1.4 *Jestliže konverguje řada* $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$, *pak konverguje také řada* $(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2}) + (a_{n_2+1} + \cdots) + \cdots$ *a obě mají stejný součet.*

Poznámka: Snadno lze sčítat pouze geometrické řady. U ostatních bychom museli postupovat podle definice a zde by většinou nastal problém s nalezením tvaru pro s_n. Většinou nám proto postačí pouze informace o tom, zda daná řada má nebo nemá konečný součet, tj. zjištění, zda řada konverguje nebo diverguje. Na to nám slouží tzv. *kritéria konvergence.*

2 Řady s nezápornými členy

Definice 2.1 Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se nazývá *řada s nezápornými* (resp. *kladnými*) *členy*, jestliže

$$a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (\text{resp. } a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}).$$

Věta 2.1 *Každá řada s nezápornými členy buď konverguje nebo diverguje k* ∞.

Věta 2.2 *Řada s nezápornými členy konverguje právě tehdy, když je posloupnost jejích částečných součtů (shora) omezená.*

2.1 Kritéria konvergence a divergence

Následující věty se nazývají *kritéria konvergence a divergence řad.* Kriteria dávají jak postačující podmínky pro konvergenci a tak i postačující podmínky pro divergenci číselné řady. Není-li ani jedna z postačujících podmínek stanovených v kriteriu splněna, nelze podle tohoto kriteria rozhodnout.

Věta 2.3 (První srovnávací kritérium)
Nechť $\sum a_n$ *a* $\sum b_n$ *jsou řady s nezápornými členy a nechť* $a_n \leq b_n$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$. *Potom platí:*

- *jestliže řada* $\sum b_n$ *konverguje, pak konverguje také řada* $\sum a_n$;
- *jestliže řada* $\sum a_n$ *diverguje, pak diverguje také řada* $\sum b_n$.

Poznámka: Jestliže $a_n \leq b_n \; \forall n \in \mathbb{N}$, pak se řada $\sum b_n$ nazývá *majorantní* řada k řadě $\sum a_n$ a řada $\sum a_n$ se nazývá *minorantní* řadou k řadě $\sum b_n$.

Věta 2.4 (Druhé srovnávací kritérium)
Nechť $\sum a_n$ a $\sum b_n$ jsou řady s kladnými členy a nechť $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Potom platí:

- *jestliže řada $\sum b_n$ konverguje, pak konverguje také řada $\sum a_n$;*
- *jestliže řada $\sum a_n$ diverguje, pak diverguje také řada $\sum b_n$.*

Věta 2.5 (Podílové - D'Alembertovo kritérium)
Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy. Potom platí:

- *jestliže $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1 \; \forall n \in \mathbb{N}$, pak řada $\sum a_n$ konverguje;*
- *jestliže $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \; \forall n \in \mathbb{N}$, pak řada $\sum a_n$ diverguje.*

Věta 2.6 (Limitní podílové kritérium)
Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy a nechť existuje limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \in \mathbb{R}^*.$$

Potom platí:

- *je-li $q < 1$, pak řada $\sum a_n$ konverguje;*
- *je-li $q > 1$, pak řada $\sum a_n$ diverguje.*

Věta 2.7 (Odmocninové - Cauchyovo kritérium)
Nechť $\sum a_n$ je řada s nezápornými členy. Potom platí:

- *jestliže $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1 \; \forall n \in \mathbb{N}$, pak řada $\sum a_n$ konverguje;*
- *jestliže $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ pro nekonečně mnoho indexů $n \in \mathbb{N}$, pak řada $\sum a_n$ diverguje.*

Věta 2.8 (Limitní odmocninové kritérium)
Nechť $\sum a_n$ je řada s nezápornými členy a nechť existuje limita

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q \in \mathbb{R}^*.$$

Potom platí:

- *je-li $q < 1$, pak řada $\sum a_n$ konverguje;*
- *je-li $q > 1$, pak řada $\sum a_n$ diverguje.*

Věta 2.9 (Raabeovo kritérium)
Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy. Potom platí:

- *jestliže $n \cdot \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \geq q > 1$ pro s.v. $n \in \mathbb{N}$, pak řada $\sum a_n$ konverguje;*
- *jestliže $n \cdot \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \leq 1$ pro s.v. $n \in \mathbb{N}$, pak řada $\sum a_n$ diverguje.*

Věta 2.10 (Limitní Raabeovo kritérium)
Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy a nechť existuje limita

$$\lim_{n\to\infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = q \in \mathbb{R}^*.$$

Potom platí:

- *je-li $q > 1$, pak řada $\sum a_n$ konverguje;*
- *je-li $q < 1$, pak řada $\sum a_n$ diverguje.*

Věta 2.11 (Integrální kritérium)
Nechť f je reálná funkce jedné proměnné definovaná na intervalu $< 1, \infty)$, která je na tomto intervalu nezáporná a nerostoucí. Uvažujme řadu $\sum a_n$, kde $a_n = f(n)\ \forall n \in \mathbb{N}$. Potom řada $\sum a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje nevlastní integrál $\int_1^\infty f(x)\,dx$.

Poznámka: Všechna kritéria nejsou stejně silná, tj. nepodaří-li se nám o konvergenci/divergenci řady rozhodnout podle jednoho kritéria, zvolíme jiné. Většinou přitom postupujeme od jednodušších ke složitějším, vždy však s přihlédnutím ke konkrétnímu tvaru a_n.
Poznámka: Existuje celá řada dalších kritérií konvergence pro řady s nezápornými členy. Žádné z nich však není univerzální v tom smyslu, že bychom podle něho mohli rozhodnout o konvergenci/divergenci libovolné řady s nezápornými členy.

3 Řady absolutně a relativně konvergentní

Nyní budeme uvažovat řady $\sum a_n$ s libovolnými (tj. kladnými i zápornými) členy. Ke každé řadě $\sum a_n$ má pak smysl uvažovat řadu $\sum |a_n|$, tj. řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \cdots$$

Definice 3.1

- Říkáme, že řada $\sum a_n$ *konverguje absolutně* (nebo *je absolutně konvergentní*), jestliže konverguje řada $\sum |a_n|$.
- Říkáme, že řada $\sum a_n$ *konverguje relativně* (nebo *je relativně konvergentní*), jestliže řada $\sum a_n$ konverguje a řada $\sum |a_n|$ diverguje.

Věta 3.1 (O absolutní konvergenci) *Je-li řada $\sum a_n$ absolutně konvergentní, pak je také konvergentní.*

Věta 3.2 *Nechť řada $\sum a_n$ konverguje absolutně. Pak platí*

$$\left|\sum a_n\right| \leq \sum |a_n|$$

3.1 Kriteria absolutní konvergence

Vzhledem k tomu, že $\sum |a_n|$ je řada s nezápornými členy, dávají kriteria z předchozí kapitoly ihned kriteria pro absolutní konvergenci, např.:

Věta 3.3 (Srovnávací kriterium) *Nechť $\sum b_n$ je konvergentní řada s nezápornými členy a $\sum a_n$ řada s libovolnými členy. Potom platí:*

- *jestliže $|a_n| \leq b_n\ \forall n \in \mathbb{N}$, pak $\sum a_n$ konverguje absolutně;*
- *jestliže $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}\ \forall n \in \mathbb{N}$, pak $\sum a_n$ konverguje absolutně.*

Věta 3.4 (Odmocninové kriterium)

- *Jestliže $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1\ \forall n \in \mathbb{N}$, pak $\sum a_n$ konverguje absolutně;*
- *jestliže $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ pro nekonečně mnoho indexů $n \in \mathbb{N}$, pak $\sum a_n$ diverguje;*

- *jestliže existuje limita* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q \in \mathbb{R}^*$, *pak pro* $q < 1$ *řada* $\sum a_n$ *konverguje absolutně a pro* $q > 1$ *řada* $\sum a_n$ *diverguje.*

Věta 3.5 (Podílové kriterium)

- *Jestliže* $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1\, \forall n \in \mathbb{N}$, *pak* $\sum a_n$ *konverguje absolutně;*

- *jestliže* $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1\, \forall n \in \mathbb{N}$, *pak* $\sum a_n$ *diverguje;*

- *jestliže existuje limita* $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q \in \mathbb{R}^*$, *pak pro* $q < 1$ *řada* $\sum a_n$ *konverguje absolutně a pro* $q > 1$ *řada* $\sum a_n$ *diverguje.*

3.2 Přerovnávání řad

Definice 3.2 Nechť $\sum a_n$ je číselná řada a posloupnost $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je permutací množiny $\mathbb{N}$ (tj. je to posloupnost, v níž se každé přirozené číslo vyskytuje právě jednou). Potom říkáme, že řada $\sum a_{k_n}$ vznikla *přerovnáním* řady $\sum a_n$.

Věta 3.6 *Nechť řada* $\sum a_n$ *konverguje absolutně. Potom absolutně konverguje také řada* $\sum a_{k_n}$ *vzniklá přerovnáním řady* $\sum a_n$ *a platí* $\sum a_{k_n} = \sum a_n$.

Věta 3.7 *Nechť řada* $\sum a_n$ *konverguje relativně a nechť* $s \in \mathbb{R}$ *je libovolné číslo. Potom*

- *existuje přerovnání* $\sum a_{k_n}$ *řady* $\sum a_n$ *takové, že* $\sum a_{k_n}$ *konverguje a má součet* s;

- *existuje přerovnání* $\sum a_{p_n}$ *řady* $\sum a_n$ *takové, že* $\sum a_{p_n}$ *diverguje;*

- *existuje přerovnání* $\sum a_{q_n}$ *řady* $\sum a_n$ *takové, že* $\sum a_{q_n}$ *osciluje.*

3.3 Alternující řady

Definice 3.3 Nekonečná číselná řada $\sum b_n$ se nazývá *alternující* (*se střídavými znaménky*), jestliže $\operatorname{sgn} b_{n+1} = -\operatorname{sgn} b_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Alternující řady jsou tedy tvaru

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \cdots \\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} a_n &= -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - \cdots \end{aligned}$$

kde $\{a_n\}$ je posloupnost kladných čísel.

Věta 3.8 *Alternující řada* $\sum (-1)^{n-1} a_n$ *konverguje právě tehdy, když*

- $\{a_n\}$ *je nerostoucí posloupnost kladných čísel a*

- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Pro součet s *této řady navíc platí* $a_1 - a_2 < s < a_1$.